

Rekursion

Eine wesentliche Grundlange für die Weiterentwicklung von Rechenverfahren ist die Rekursion (lateinisch *recursus* Rücklauf, Ebbe, Heimkehr, *recurso* ich kehre zurück). Einfach umschrieben wird dabei etwas auf sich selbst angewendet. Anschaulich ist dafür Münchhausens Erzählung, wie er sich selbst am Schopf aus dem Sumpf zieht. Ein nahezu triviales Beispiel ist

$$x := \sqrt{\sqrt{\sqrt{\dots \sqrt{x}}}} .$$


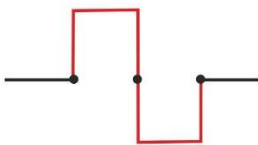
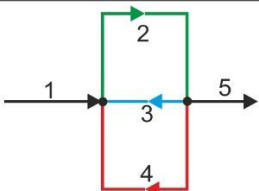

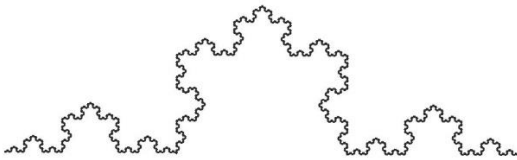
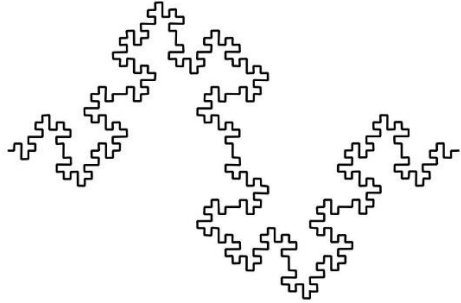
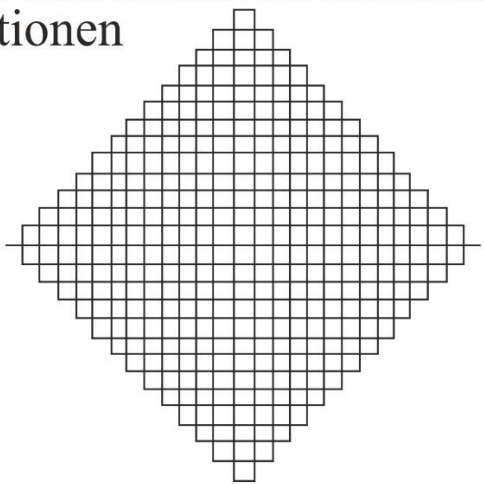
Iterativ müsste geschrieben werden

$$x_n = \sqrt{x_{n-1}}; x_{n-1} = \sqrt{x_{n-2}}; \text{ usw. bis } x_1 = \sqrt{x_0} \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Bei der Rekursion muss oft nicht das Ende angegeben werden. Theoretisch sind die Schritte oft unendlich fortzusetzen. Häufig tritt aber irgendwann eine Konvergenz oder Divergenz ein, seltener ein Pendeln zwischen mehreren Werten oder stochastisches Verhalten. Das kann leicht für die Formel oben mit einem Taschenrechner überprüft werden. Es wird irgendeine positive Zahl eingegeben und dann wiederholt die Wurzeltaste betätigt. Der angezeigte Wert strebt dabei schrittweise gegen 1. Allerdings funktioniert das nicht für 0 und negative Zahlen.

Der Begriff **Fraktal** (lateinisch fractum gebrochen) wurde 1975 von Mandelbrot für äußerst vielfältig „gebrochene“ Gebilde, Linien und Strukturen eingeführt [Man87]. Wesentlich für ihre Erzeugung ist die Rekursion. Daher gab es schon deutlich früher Strukturen, die aber erst später zu den Fraktalen gezählt wurden. Sie entstehen durch rekursive Ersetzungen von Linienabschnitten als seltsame Liniengebilde (Monsterkurven), die theoretisch unendlich lang und nirgends differenzierbar sind. Sie erregten zunächst jedoch kein Interesse. Am ältesten ist wohl die Kochkurve, die heute zuweilen auch Schneeflockenkurve heißt. Weitere Beispiele zeigt Bild 34. Darin ist N die Anzahl der neu entstehenden Linien, r die Länge der geteilten Abschnitte und D

die Hausdorff-Dimension. Letztere nimmt bei einfachen Linien den Wert 1, bei Flächen 2 usw. an. Da die Hilbert-Kurve als Linie schließlich jeden (reellen) Punkt in der Fläche erreicht, erhält sie $D = 2$.

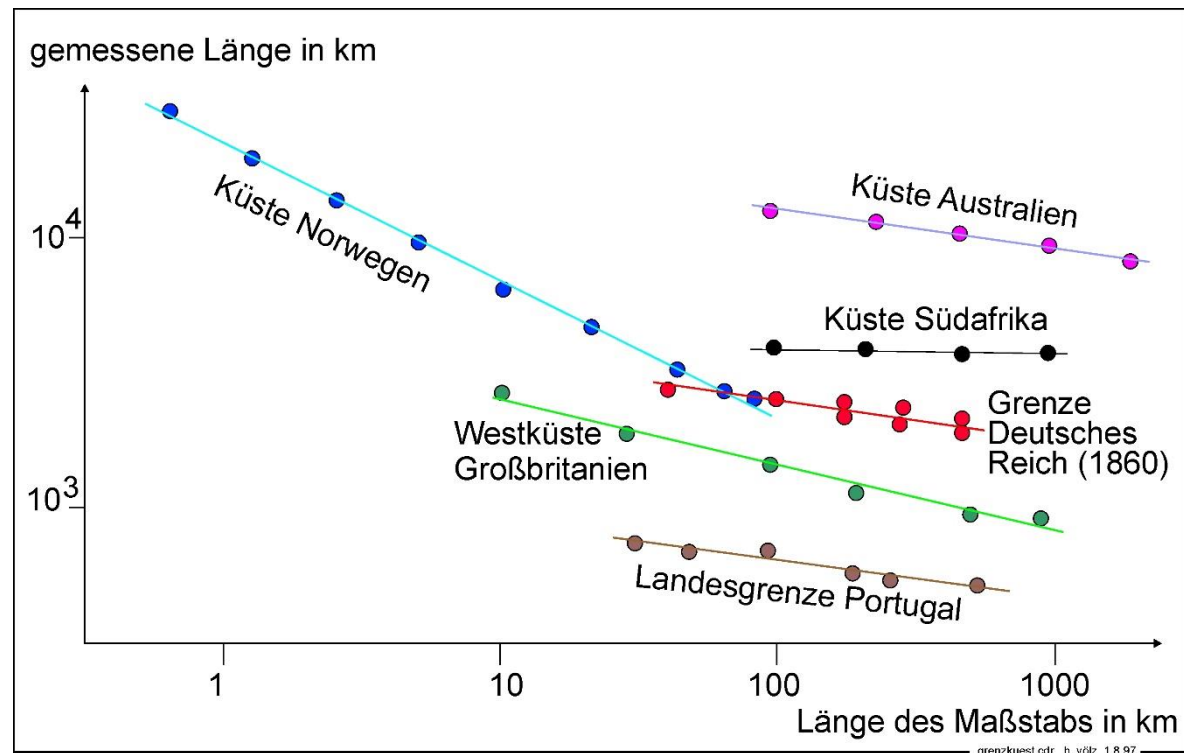
Jede Linie ————— wird ersetzt durch		
 $N = 4, r = 1/3$ $D = \log(4)/\log(3) = 1,26 \dots$	 $N = 8, r = 1/4$ $D = \log(8)/\log(4) = 1,5$	 $N = 9, r = 1/3$ $D = \log(9)/\log(3) = 2$
Ergebnisse nach mehreren Iterationen		
 <p>2. Rekursion</p>  <p>Koch-Kurve</p>	 <p>Drachen-Kurve</p>	 <p>Hilbert-Fläche</p>

ersatzG.cdr h. völg 120.5.2000

Fraktale Linien, die sich durch rekursiv unendlich oft wiederholte Ersetzungen von allen entstandenen Linienabschnitten ergeben.

Dieses „ungewöhnliche“ Verhalten wurde später bei fast allen physikalischen Grenzen, insbesondere bei Land-Wasser- sowie Ländergrenzen, Ränder von Blättern usw. gefunden. Ausführlich wurde es 1961 von Lewis Richardson untersucht. Dabei ergab sich Bild 35. Die Länge einer Grenze hängt danach u. a. deutlich vom Maßstab der Darstellung ab.

Länge einer Grenze hängt u. a vom Maßstab der Darstellung ab.



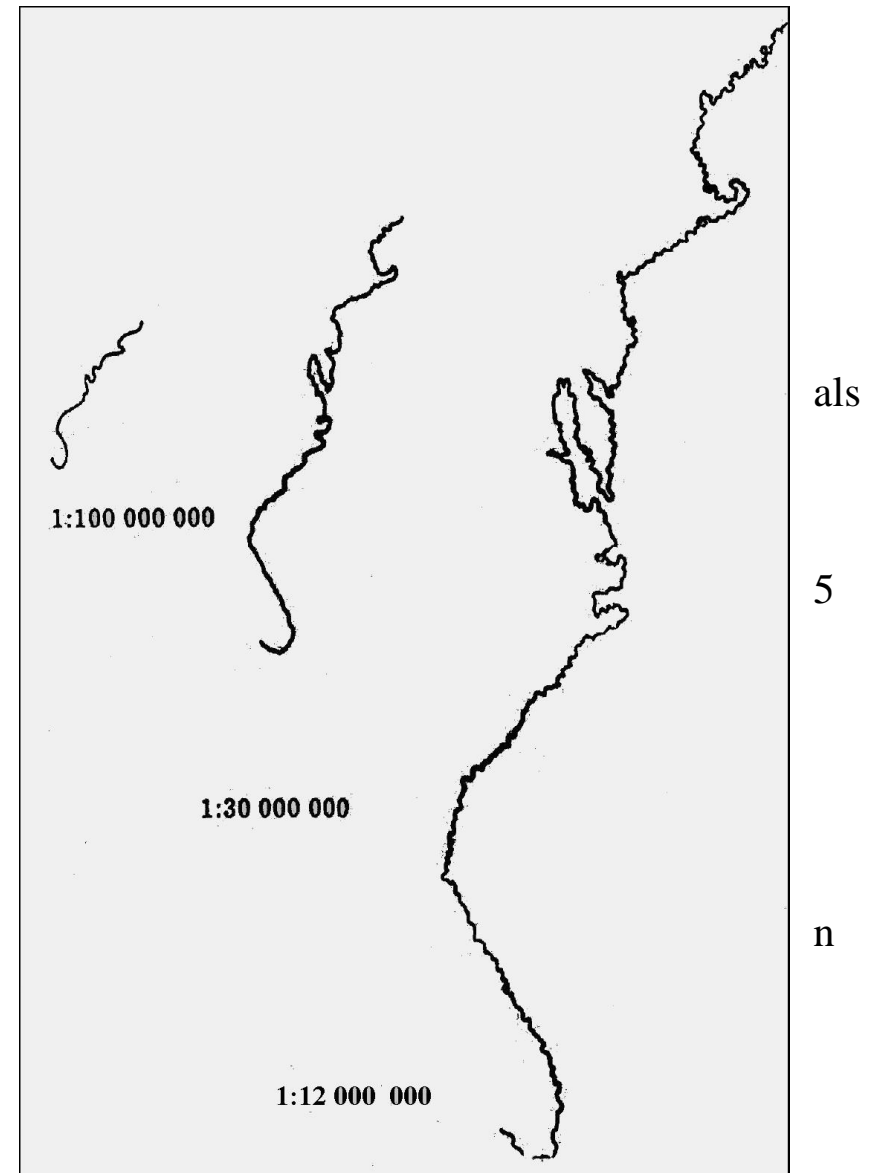
Doch selbst benachbarte Länder geben gegenseitig die Länge ihrer gemeinsamen Grenzen offiziell unterschiedlich an, z. B. Spanien \Leftrightarrow Portugal: 987 \Leftrightarrow 1214 km und Niederlande \Leftrightarrow Belgien 380 \Leftrightarrow 449 km. Deutlich zeigt sich dieser Einfluss bei Darstellungen der Ostküste der USA: Globus: 3 000 km, große Karte: 7 000 km, Seekarte: 17 000 km, zu Fuß ablaufen: 24 000 km..

Für die Hausdorff-Dimension gilt zwischen der gemessenen Länge L_0 und einem Messradius R daher $L = L_0 \cdot R^{1-D}$. Diesen Zusammenhang veranschaulicht Bild 36. Später wurde D von Mandelbrot auch fraktale Dimension bezeichnet. Den Zusammenhang mit dem Messradius weist Bild 37 aus.

Ostküste der USA in verschiedenen Maßstäben.

Ab 1968 zeigte **Lindenmayer**, wie durch Rekursion mit sehr einfachen Formeln sehr viele Pflanzen graphisch erzeugt werden können. Seine typischen Algorithmen sind L-Systeme bekannt geworden. Eine betont einfache Variante ist die Schildkrötengrafik: Eine gedachte Schildkröte befindet sich an einem Ort und kann von dort jeweils einen Schritt vorwärts ausführen. Dazu gehören nur Operationen:

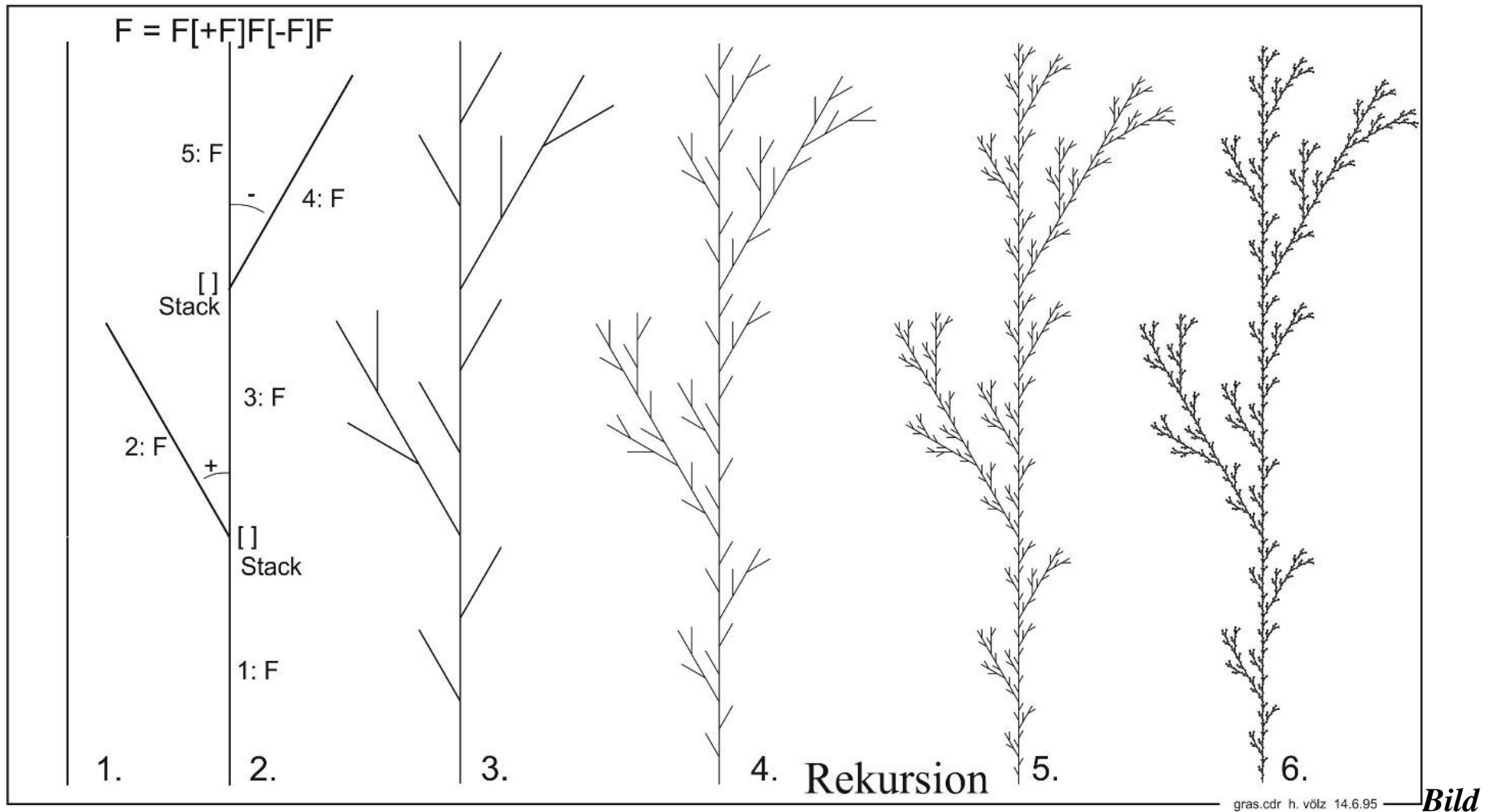
- ✓ F Es wird eine Linie gegebener Länge in der vorgegebenen Richtung gezeichnet.
- ✓ + Die Richtung für die Linien wird im Uhrzeigersinn um n Grad gedreht.
- ✓ - Die Richtung wird gegen den Uhrzeigersinn um Grad gedreht.
- ✓ [Speichert den aktuellen Ort und Winkel auf einem Stack.
- ✓] Es wird zur gespeicherten Stelle und Richtung zurückgekehrt.



Für die ersten Schritte ergibt sich dann:

- [illegible]

Die Ausführung dieses Programms zeigt in den ersten 6 Schritten Bild 38. Bereits ab dem 4. Schritt ist ein Grashalm oder Strauch zu erkennen.



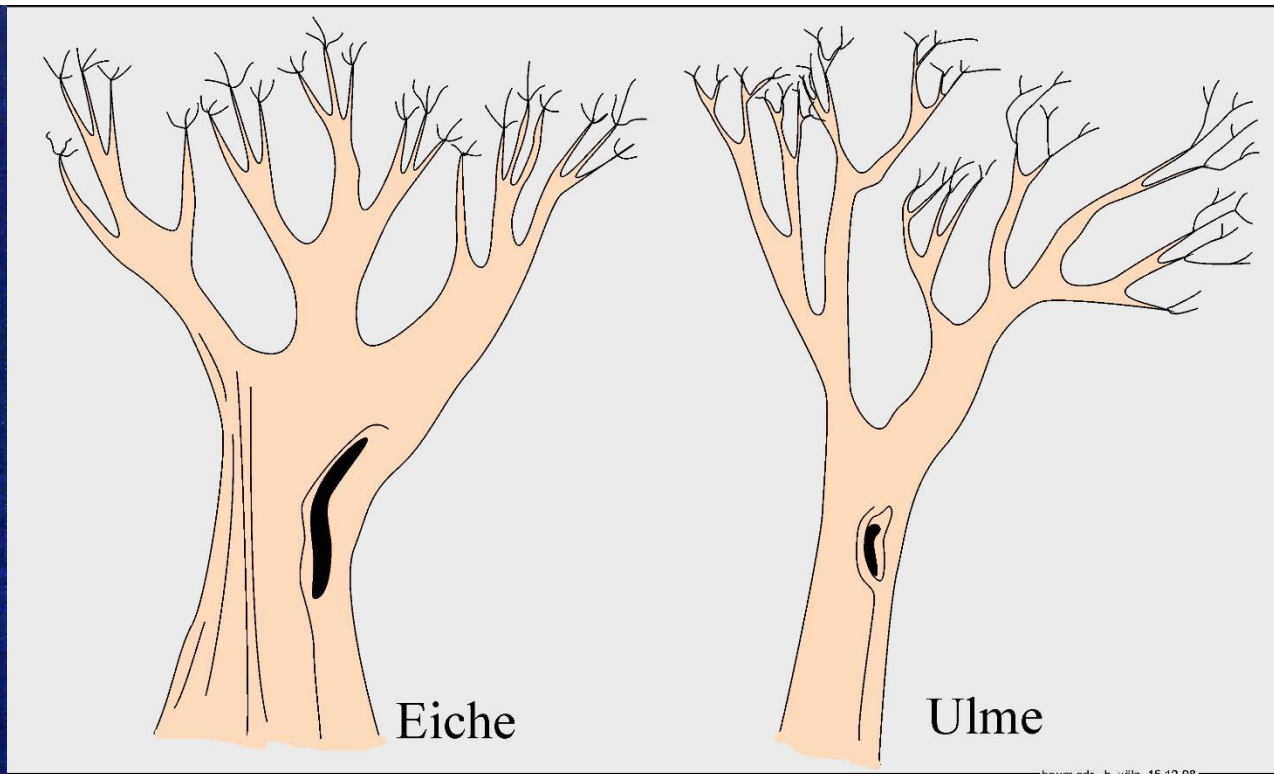
Die ersten Rekursions-Schritte für $F := F[+F]F[-F]F$.

Mit komplizieren, aber dennoch einfachen Axiomen erreichte Lindenmayer eine sehr hohe Qualität. Das zeigen viele Beispiele in [Pru90]. Eine blühende Pflanze daraus ist Bild 39. Die umfangreichen Ergebnisse

legen es nahe, dass die genetischen Algorithmen nach einem ähnlichen Prinzip funktionieren dürften. Auch unser Sehen könnte vielleicht davon Gebrauch machen. So erkennen wir z. B. im Winter Bäume allein an ihrem Verzweigungsmuster. So ist die Eiche durch fortlaufende, dreifache Verzweigung mit kleinen Längen dazwischen leicht zu erkennen. Die Ulme verzweigt dagegen nur zweifach mit deutlich größeren Längen (Bild 40). Weitere Beispiele zeigen die Fotografien von Bild 41.



Blühende Pflanze als Beispiel aus [Pru90]



Eiche Ulme typische Verzweigungen



Winterfotografien von 1. Linde, 2. Essigbaum, 3. Kastanie und 4. Eiche.

Leider ist es sehr schwierig, aus den Bildern die dazugehörige Rekursionsformel zu finden. Einen beachtlichen Erfolg erzielten 1995 zwei Studenten mit einer sehr umfangreichen Diplomarbeit an der TU-Berlin [Opp95]. Dazu benutzen sie u. a. komplexe Algorithmen von Rechenberg. Nebenbei erkannten sie, dass unterschiedliche Algorithmen durchaus zum gleichen Bild führen können, z. B.:

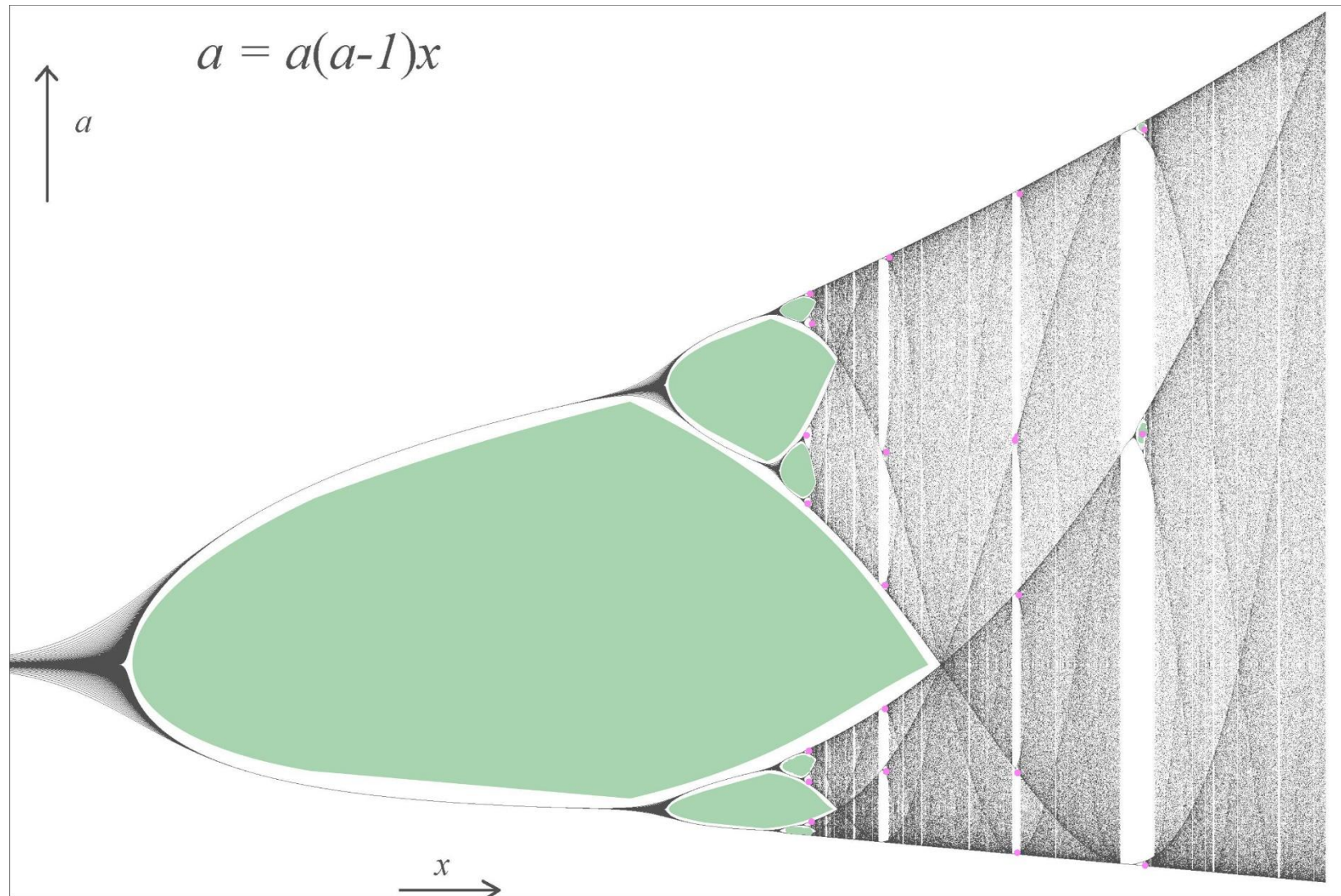
$F = F[+F]F[-F]F$ oder $F = FF[+FF]FF[-FF]$ bzw. $F = F[+F][+F]F[-F]F$.

Feigenbaum verwendete zur Rekursion eine relativ übersichtliche Formel, die auch Verhulst-Gleichung genannt wird:

$$a := a \cdot (a - 1) \cdot x.$$

Für die Variable a ist ein Startwert a_0 zu wählen. Seine Größe ist jedoch für das Verhalten bei der Rekursion nahezu unkritisch, meist $a_0 \approx 0,5$ gewählt. Deutlich einflussreicher ist die „Konstante“ x . Je nach ihrer Wahl treten vier typische Zeitverläufe auf:

- a konvergiert gegen einen stabilen Wert,
- nach einem Einschwingvorgang pendelt a periodisch zwischen den Werten 2, 4, 8 usw.,
- a verhält sich weitgehend stochastisch,
- a divergiert gegen ∞ (nicht darstellbar).



Die drei typischen Zeitverläufe bei der Rekursion von $a := a \cdot (a - 1) \cdot x$.

Nicht den Zeitverlauf, sondern die Abhängigkeit von x zeigt dies Bild. Dabei sind für jedes x die jeweils zeitlich angenommen Werte einfach „übereinander“ geschrieben. Dieses Bild erhielt den Namen **Feinbaum-Diagramm**. Für hinreichend großes x (ganz rechts) erfolgt die Divergenz. Der entsprechende unendliche Wert ist jedoch für die Darstellung zu groß..

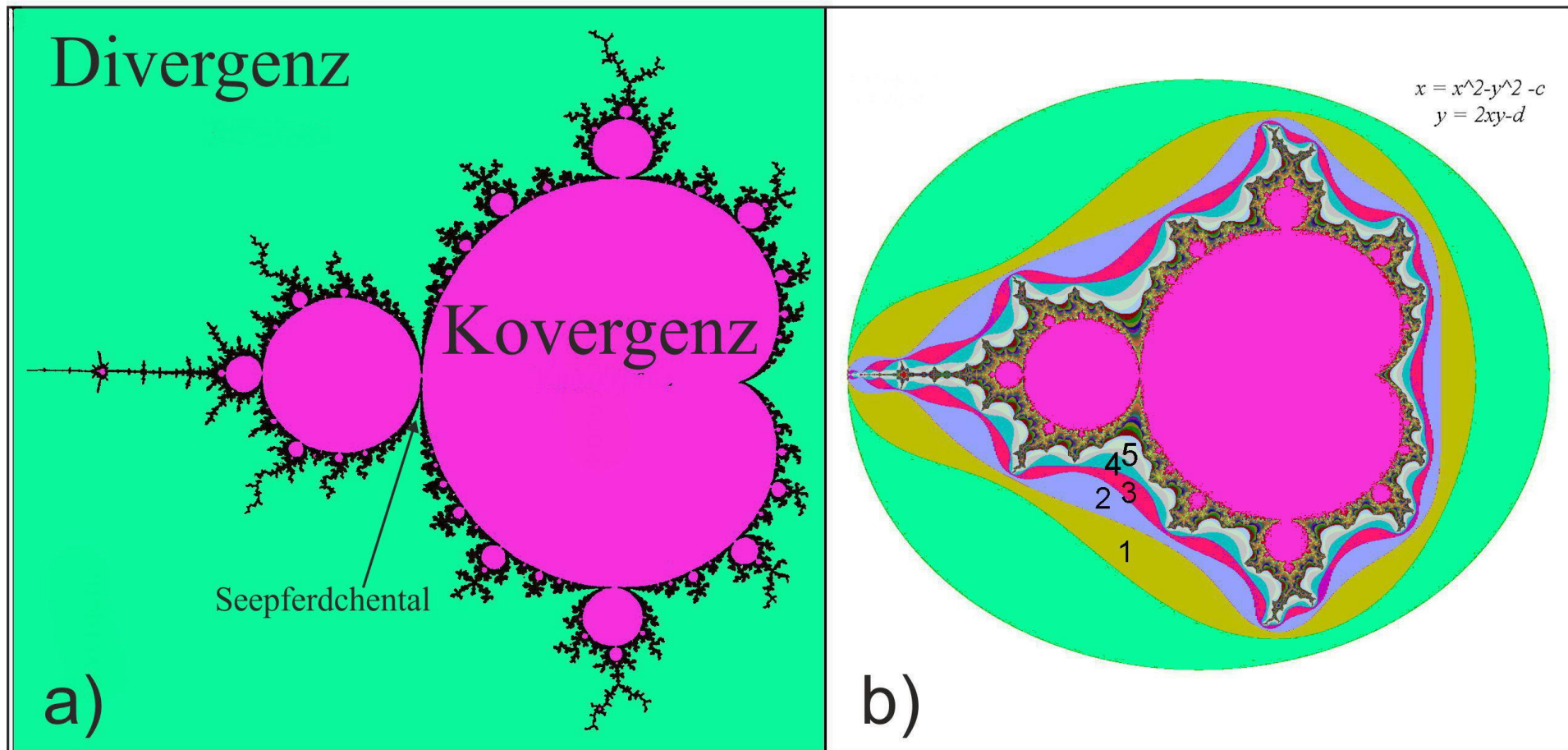
Das Apfelmännchen

Die Funktionen-Theorie untersucht Zusammenhänge zwischen komplexen Zahlen, z. B. $\psi = f(\xi)$, wobei z. B. $\psi = x+i \cdot z$ und $\xi = y+ i \cdot w$ mit $i=\sqrt{-1}$ gilt.

1980 setzte **Mandelbrot** hierzu erstmals die leistungsfähige Rechentechnik mit Grafikausgabe ein. Dabei begann er mit der einfachen quadratischen Gleichung $\xi := \xi^2 + \chi$. 1. In reeller Umschreibung lautet dafür die Iteration

$$x := x^2 - y^2 - c \quad \text{und} \quad y := 2 \cdot x \cdot y - d.$$

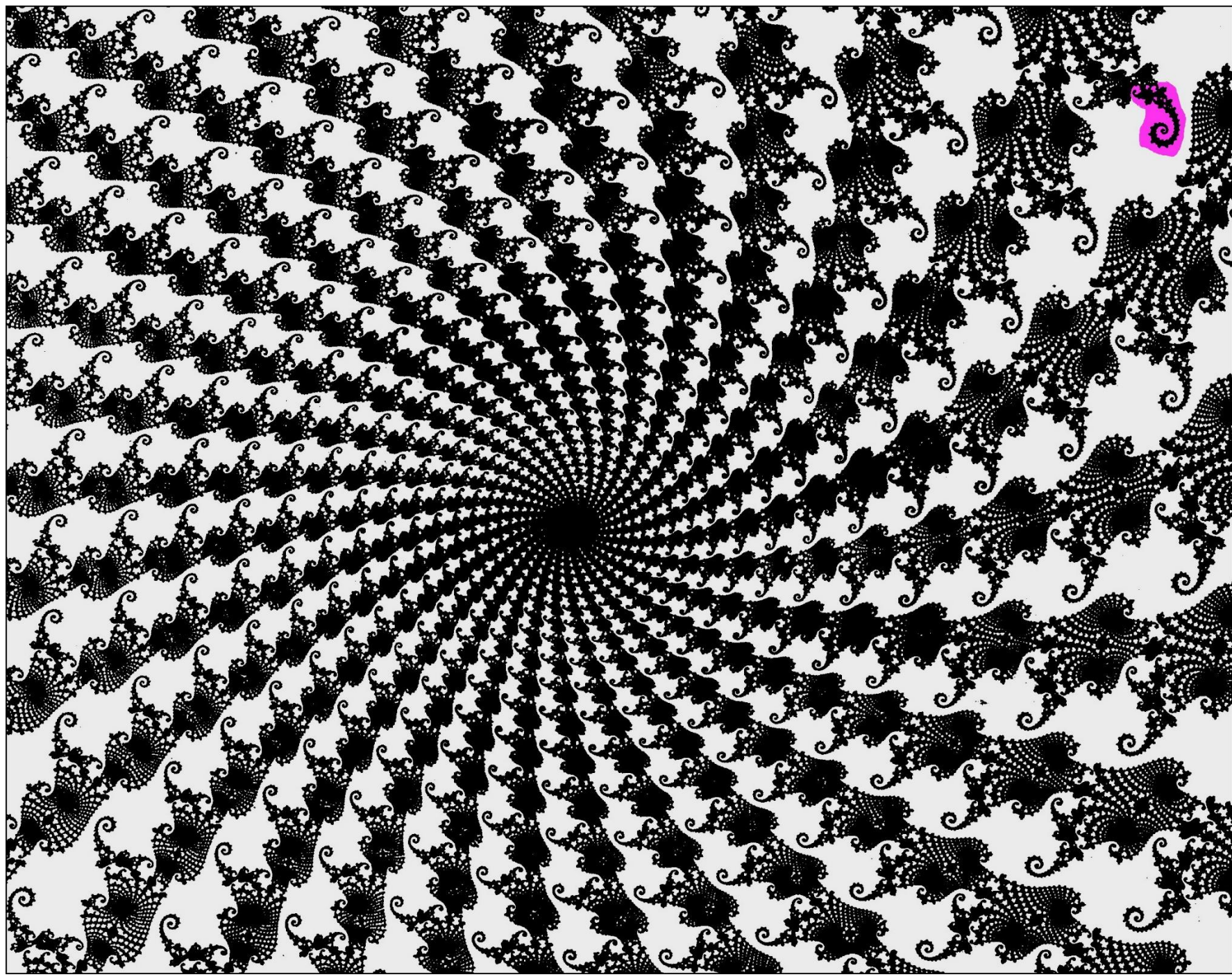
Dabei sind c und d Konstanten für die Bildkoordinaten. Mit großem Erstaunen erhielt er hierbei das Bild 45. Der Konvergenzradius war zu einer höchst komplexen (verkrüppelten, daher unendlich langen) Grenze entartet. Zunächst vermutete er einen Programmierfehler. Doch es war alles korrekt. Die Divergenz ist bereits dann gesichert, wenn bei der Rekursion erstmalig $a > 1$ auftritt. Das kann bereits nach 1, 2, 3 usw. Schritten erfolgen. Werden diese Bereiche durch verschiedene Farben gekennzeichnet, so entstehen ästhetisch wirkende Bilder.



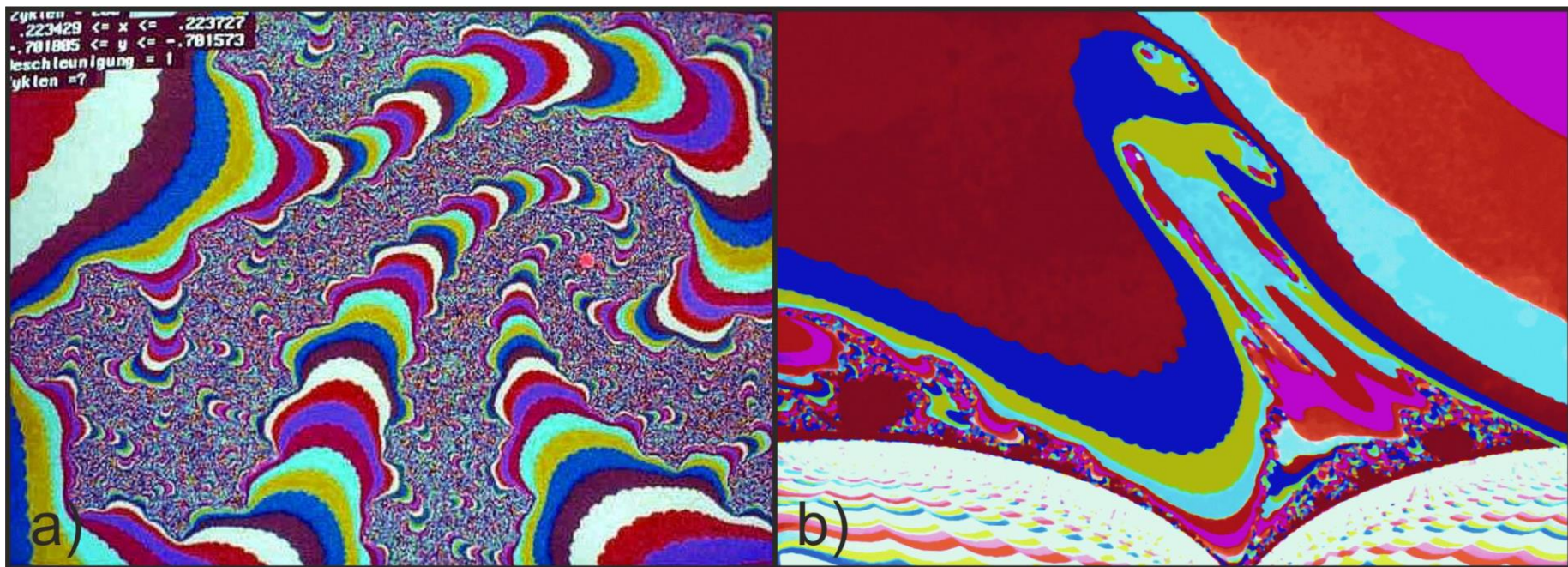
a) Der Konvergenz- und Divergenzbereich der komplexen quadratischen Funktion, b) farbige Darstellung für die notwendigen Schritte (1 bis 5 sind gekennzeichnet) zum Nachweis der eintretenden Divergenz. Im Seepferdchentail (Pfeil in a) sind besonders viele Schritte notwendig.

Unmittelbar nach Mandelbrot begannen vielerorts umfangreiche Untersuchungen, die alle ähnliches auswiesen. Das galt auch für Funktionen, wie $x = f(x, y, a, b)$ und $y = g(x, y, a, b)$, die dann andere, aber ebenfalls hoch

komplex strukturierte Bilder ergaben. Als dann die Heim-Computer-Technik verfügbar war, wurde es zum Hobby solche und ähnliche Fraktale zu generieren. Der Reiz lag sowohl bei der ästhetischen Wirkung als auch beim Wettbewerb sie immer schneller zu generieren. Zunächst wurden ja für ein Bild viele Stunden benötigt. Bei den Computerfreaks dürfte dann, bisher nicht nachweisbar, die Bezeichnung Apfelmännchen in Analogie zum sächsischen Pflaumenmännli entstanden sein. Besonders wirkungsvoll ist z. B. das Seepferdchental, welches in einem Schwarz-Weiß-Ausschnitt das folgende Bild zeigt.

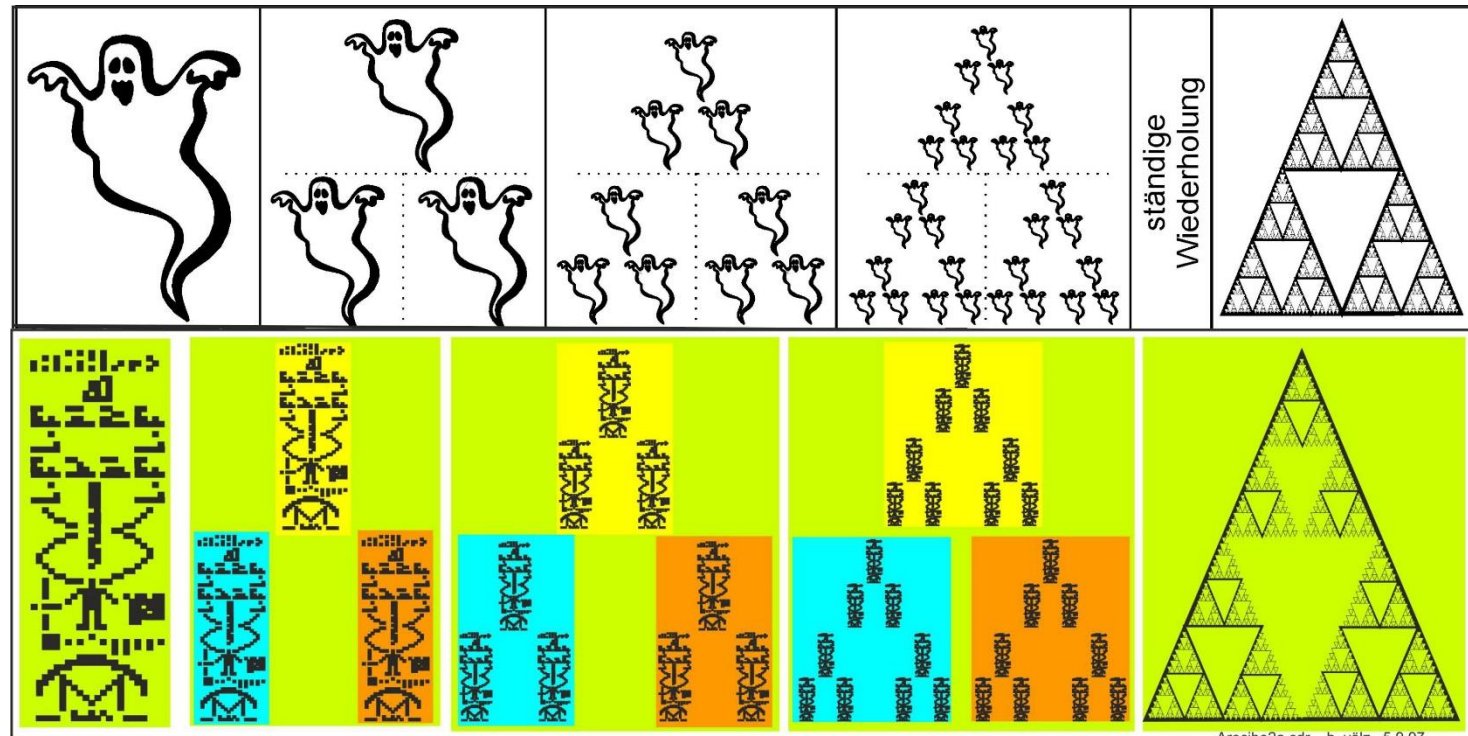


Spätestens hier begann die Frage, was den nun eigentlich Fraktale sind. Die erste Antwort hierauf hatte zwar bereits 1987 Mandelbrot mit seinem Buch [Man87] gegeben: Vieles in der Natur ist fraktal. Folglich entstand etwa die Aussage: Die linearen und kreisförmigen geometrischen Bilder sind vom Menschen geschaffen; die Natur benutzt rekursive Verfahren und erzeugt so Fraktale. Weiter wurde diskutiert, ob die Fraktale objektiv in der Natur vorhanden sind und nur entdeckt und erst danach mittels Mathematik sichtbar werden, oder ob die Mathematik sie erst generiert (erfindet) und damit quasi ungewöhnliche V-Information sind. Ferner gab es Streit zum ästhetischen Wert der Fraktale (s. u.). Das folgende Bild ergänzt noch zwei weitere Beispiele.



Zwei ausgewählte Fraktale

Um 1900 schlug u. a. Peitgen eine Kopiermaschine für die rekursive Erzeugung von Fraktalen vor [Jür89]. Mathematisch war das Prinzip bereits früher als iterative Drehmultiplikation (kontraktive Transformation) bekannt. Bild zeigt dazu eine noch recht übersichtliche Variante: Einmal (oben) geht sie vom Bild eines „Geistes“ (ganz links) aus, unten von Arecibo-Signal. Diese Ursprungsbilder werden dann auf etwa $1/3$ verkleinert je einmal oben sowie darunter je links und rechts angeordnet. Mit dem so neu entstandenen Bild wird dieser Schritt fortlaufend wiederholt. In beiden Fällen entsteht schließlich ganz rechts das Sierpinski-Dreieck. Das Ursprungsbild ist hier für völlig belanglos. Ausschließlich der Algorithmus bestimmt das Ergebnis. Das ist somit eine neuartige Bilderzeugung. Erstaunlich ist dabei, dass wir nicht imstande sind vom Algorithmus auf das Endbild zu schließen¹.



*Rekursion mittels
Drehmultiplikation.*

¹ 1995/96 habe ich dazu in Seminaren an der TU-Berlin zwei Semester lang mit Studenten ergebnislose Versuchen durchgeführt. Niemand gelang eine Vorhersage für das Endbild.

Eine statistische Variante stammt von Barnsley [Bar93]. Er verwendet zwei Gleichungssysteme mit zufällig wechselnder Wiederholung:

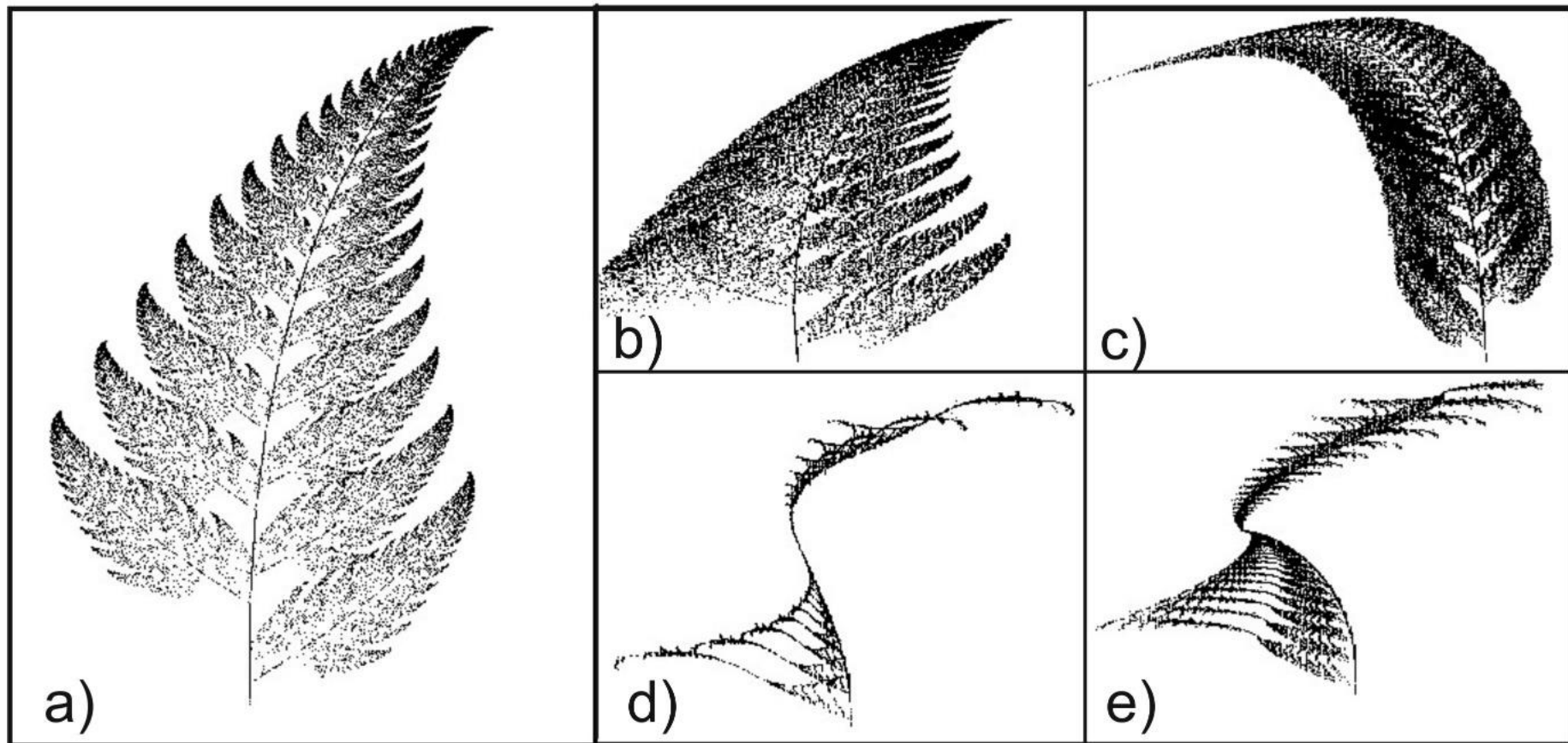
$$x := A_n \cdot x + B_n \cdot y + C_n$$

$$y := D_n \cdot x + E_n \cdot y + F_n$$

Die Koeffizienten A_n bis F_n bestimmen das entstehende Bild. Für einen Farn (Bild 50) betragen sie:

Gleichung n	A	B	C	D	E	F
1.	0	0	0	0	0	0
2.	0,2	-0,26	0,23	0,22	0	1,6
3.	-0,15	0,28	0,26	0,24	0	0,44
4.	0,85	0,04	-0,04	0,85	0	1,6

Barnsley behauptete dabei, dass die Koeffizienten wenig kritisch seien. Doch wenige eigene Versuche zeigten das Gegenteil. Mit nur wenigen Änderungen entstehen deutlich andere Bilder. z. B. b): $A_4 = 0.99$; c): $A_2 = 0,7$; d): $F_2 = 16$ sowie e): $F_2 = 16$ und $A_4 = 0,65$.



ld

Mit dem Barnsley-Hüpfen erzeugte Bilder.

Die fraktalen Methoden

Zusammengefasst können fünf Methoden für fraktale Bilder unterschieden werden:

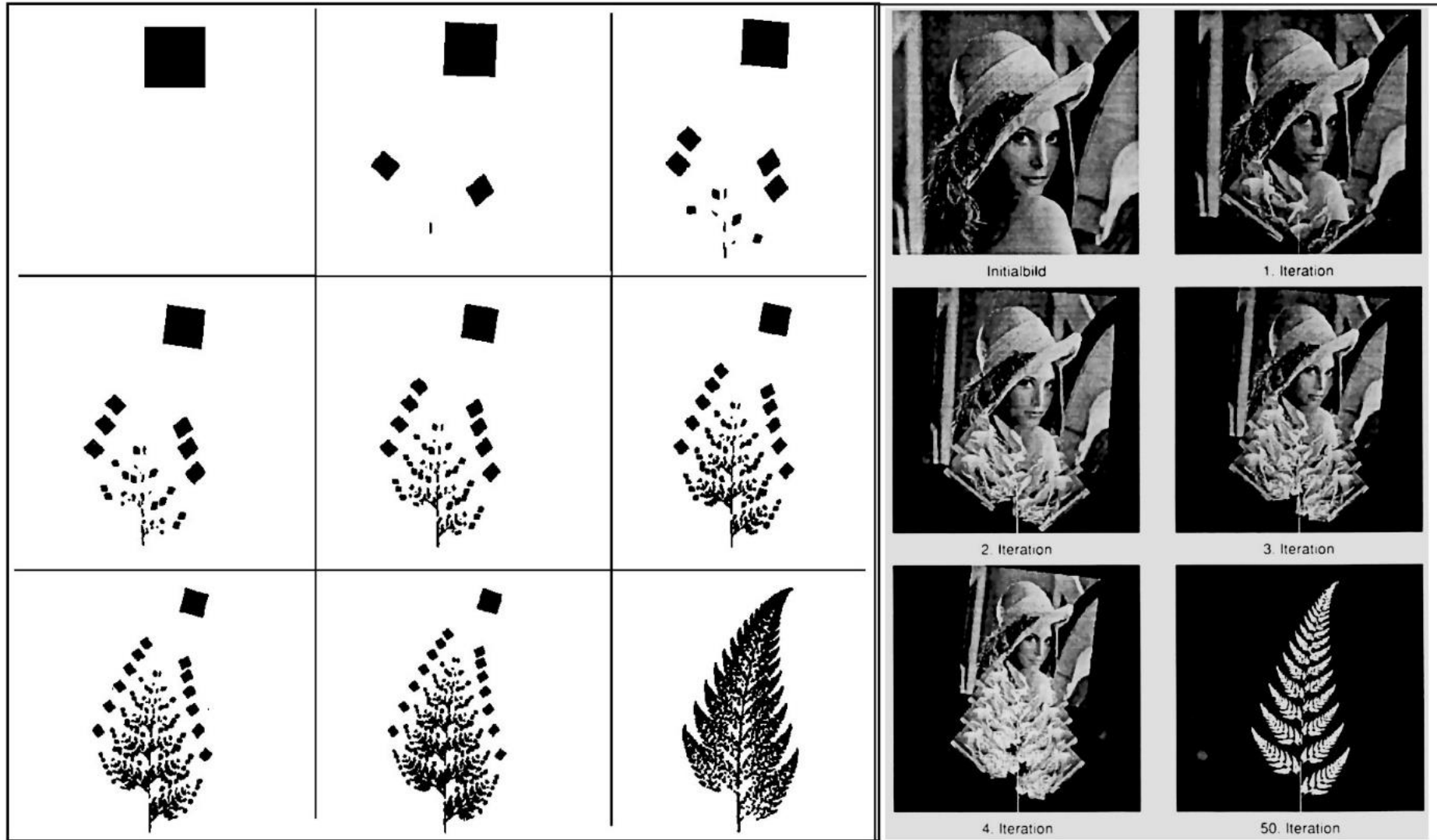
1. **Monsterkurven**: u. a.: Koch-, Hilbert- und Drachenkurve. Hierzu gehören in der Natur die Grenzen, Küsten und Blätter.
2. **Formale Sprachen**, insbesondere L-Systeme, mit denen Pflanzen generiert werden können.
3. **Iterationen** der Feigenbaum- und Mandelbrot-Verfahren $x := f(x, a)$ bzw. $x = f(x, y, c)$ sowie $y = g(x, y, d)$, mit dem Apfelmännchen. Indirekt gehören dazu auch die hier nicht behandelten Julia-Mengen. Sie sind dadurch bestimmt, dass sie die Menge aller Punkte zusammenfassen, die sich auf sich selbst abbilden.
4. **Drehmultiplikation** als Kopierverfahren mit mehrfach sich abbildenden Bildern.
5. **Zufallsprinzipien** (Hüpfen) mit Gleichungssystem und Zufall nach Barnsley.

Erstaunlich ist dabei, dass sich mit jedem Verfahren, weitgehend die gleichen Fraktale erzeugen lassen. Als Beispiel zeigt hierzu zeigt Bild 51, dass auch mit der Drehmultiplikation der gleiche Farn wie mit dem Zufallsprinzip entsteht. Auch hier wird wieder deutlich: das Ausgangsbild hat keinen Einfluss auf das Endbild. Zusätzlich zu den fünf fraktalen Methoden gibt es in der Natur und in den naturwissenschaftlichen Theorien erstaunlich viele Aussagen, die mit Fraktalen zusammenhängen. Das vielleicht älteste Beispiel steht im Zusammenhang mit dem 1887 von König Oskar II von Schweden ausgeschriebenen wissenschaftlichen Wettbewerb, beschrieben am Anfang von Kapitel 3. Dort sind auch weitere chaotische Wirkungen genannt, die hier einzuordnen wären. Außerdem seien hier noch kurz erwähnt: Die Wirbeltheorie von Prandtl, insbesondere mit dem Umschlag von laminarer in turbulente Strömung beim Überschreiten der Reynold-Konstanten, die Chaos-Theorie mit meist nichtlinearen Differentialgleichungen; zelluläre Automaten mit Gesetzen und Nachbarschaftsbeziehungen, die Evolution z. B. bei Eigen, die Multistabilität und Rückkopplung der

Kybernetik, die magnetische Hysterese sowie Quasikristalle mit Fernordnung. Die Details dazu würden hier aber zu weit führen und müssen daher bei Interesse aus der Fachliteratur entnommen werden.

Wichtiger ist es dagegen, die wichtigsten typischen Eigenschaften der Fraktale zusammenzufassen:

- Sie besitzen verkrumpelte Kurven mit fraktaler (Hausdorf-) Dimension.
- Ihre Bilder kennzeichnen eine sehr hohe Komplexität und Strukturreichtum.
- In den Bildern tritt immer Selbstähnlichkeit auf.
- Generiert werden sie durch einfache rekursive Algorithmen. Indirekt entsteht dadurch die Möglichkeit für hocheffektive Komprimierungen, deren Erzeugung aber viel Zeit benötigt.
- Häufig besitzen sie große Ähnlichkeit mit Gebilden und Geschehen in der Natur.
- Sie bilden eine eigenständige (abgeschlossene) Bild-Klasse (s. u.), die den geometrischen (euklidischen) Bildern entgegengesetzt ist.
- Teilweise gibt es Ähnlichkeiten mit unmöglicher Perspektive wie bei Bildern von Escher.
- Meist besteht eine Verquickung von Zufälligkeit und Gesetzmäßigkeit.
- Vielfach zeigen sie subjektiv eine beachtliche ästhetische Wirkung und wurden daher für die Computer-Kunst wichtig.



Erzeugung des Farns mittels Drehmultiplikation.

Rekursives Denken ist uns offensichtlich (noch) nicht möglich. Eine Ursache dafür könnte sein, dass die Rekursivität erst 1936 mit dem Turing-Automaten und dann mit der Church-These hinreichend bekannt wurde. Außerdem mussten für die notwendig vielen Rekursionsschritte erst die elektronischen Rechner ab 1950 und für die Bilder die Computer-Grafik ab 1980 zur Verfügung stehen. Andererseits ist es sehr wahrscheinlich, dass unser Gehirn Bilder rekursiv analysiert. Das könnte die Schichtenstruktur des Sehzentrums leisten (Bild 6.154). Ohne Rekursion könnten wir wohl kaum ein Gesicht unabhängig von der (Bild-) Größe und Lage erkennen. Weiter spricht dafür, dass wir Karikaturen schneller als Fotos erkennen. Dagegen können wir seit den alten Griechen mit der euklidischen Geometrie umgehen. Die Tabelle stellt beide gegenüber.

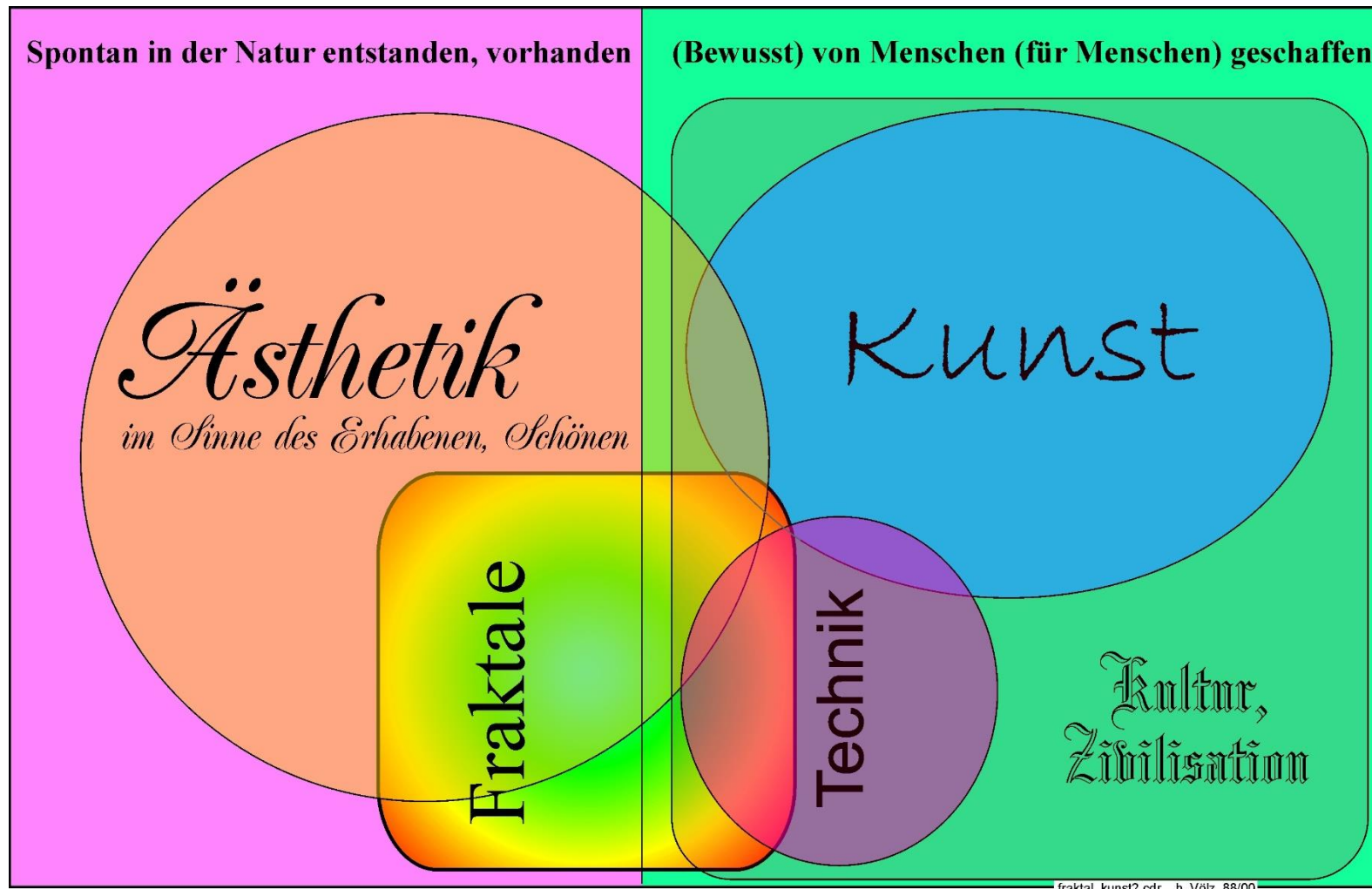
Euklidische Geometrie	Fraktale Geometrie
<ul style="list-style-type: none"> • über <i>2000 Jahre</i> alt • geeignet für Objekte, die von Menschen erzeugt wurden • beschreibbar durch eine Formel oder mit Zirkel und Lineal • Grundelemente mit bestimmter Größe 	<ul style="list-style-type: none"> • knapp <i>50 Jahre</i> alt • geeignet für natürlicher Objekte • rekursiver Algorithmus • gut skalierbar

Das belegen auch die natürlich entstandenen bzw. vom Menschen geschaffenen Objekte:

In der Natur vorhanden	Von Menschen geschaffen
<ul style="list-style-type: none"> • Kugelförmige Objekte, die durch Reibung und Abnützung entstehen. • Fraktale Gebilde, die durch Zusammenwirken <i>vieler</i> (zufälliger) <i>Einflüsse</i> entstanden (Grenzen, Küsten usw.). • Fraktale Strukturen, die rekursiv mit der Evolution erzeugt wurden und werden. • Gerade Flächen, sehr selten, nur bei echt kristallinen Strukturen, sie sind spaltbar. 	<ul style="list-style-type: none"> • Überwiegende werden mit Aufwand ebene, rechteckförmige Gebilde systematisch konstruiert. • Für die Konstruktion stehen uns Zirkel und Lineal zu Verfügung. • Objekte mit „Sinn“, u. a. Technik, Kultur, Kunst, Mystik werden bevorzugt mit geringer Komplexität geschaffen. • Kugelflächen sind selten, vorwiegend nur bei Linsenherstellung.

Bezüglich der Ästhetik und sogar der „Kunst“ bei Fraktalen wurde ich 1987/88 für eine Tagung der Universität Leipzig um einen Vortrag gebeten [Völ88a]. Dafür entstand u. a. – die damals noch etwas einfachere Variante von Bild. Da Kunst stets von Menschen für Menschen geschaffen wird, können hierzu die Fraktale nicht gehören. Aber genau wie die Natur können sie ästhetische Wirkungen hervorrufen. Unabhängig von den

beiden Auffassungen der Mathematik (s.o.) gehören sie dabei sowohl zu spontan Vorhandenem als auch zu dem vom Menschen Geschaffenem.



Einordnung der Fraktale.