

# Computeranalysen und -synthesen für Musik und Medien 2

Dieses Material beruht teilweise auf dem Buch

Völz, H.: Computer und Kunst. Reihe akzent 87. 2. Aufl. Urania - Verlag Leipzig Jena - Berlin 1990

Vollständig downloadbar von: [horstvoelz.de/kontakt/ComputerKunst.pdf](http://horstvoelz.de/kontakt/ComputerKunst.pdf)

Wichtige Details enthalten u. a. auch:

Völz, H.: Information I - Studie zur Vielfalt und Einheit der Information. Akademie Verlag, Berlin 1982. S. 214-240 (vollständig downloadbar)

Völz, H.: Information II, Theorie und Anwendung vor allem in der Biologie, Medizin und Semiotik. Akademie - Verlag Berlin 1983. S. 290-321

Völz, H.: Grundlagen der Information. Akademie - Verlag, Berlin 1991. S. 506-549 (Haus Daten 513)

Dies Material wurde heruntergeladen von [horstvoelz.de](http://horstvoelz.de)

Für privatem Gebrauch ist es frei nutzbar; bei Publikationen, Vorträgen usw. ist die Quellenangabe notwendig.

Bei kommerzieller Nutzung usw. ist eine Abstimmung mit mir erforderlich.

Bilder sind in höherer Qualität ca. 2000×3000 Pixel oder \*.cdr Version 12 und X6 verfügbar.

Prof. Dr. Horst Völz, Koppenstr. 59, 10243 Berlin, Tel./Fax 030 288 617 08

Email: [h.voelz \(at\) online.de](mailto:h.voelz@online.de)

# Kurzfassung

Hier werden die wesentlichen Grundlagen und ergänzende Beispiele vorgestellt. Das erfolgt in vier größeren Teilen mit angegeben wesentlichen Unterpunkten:

## **Naturwissenschaft + Mathematik**

Determinismus, Gesetze, Zufall

## **Shannon-Theorie**

Texttemperatur, Superzeichen, Goldener Schnitt, Auffälligkeit, WEBER-FECHNER-Gesetz, Schönheit des Hauses, BIRKHOFF-ANALYSE, Musikanalysen von FUCKS

## **Gedächtnis**

Musikanalyse: Zeiten und Gedächtnis, Lerntheorie, Textverständlichkeit, Emotionen, Witztheorie, Kreativität, KUPPER Musik, Illiac-Suite

## **Fraktale**

# Determinismus und Zufall

Unser heutiges Weltbild enthält zwei widersprüchliche Aspekte: gesetzmäßig und zufällig.  
Stark vereinfacht bedeutet *gesetzmäßig*, dass unsere *Erwartungen* begründet sind und eintreffen.  
Beim *zufälligen* Geschehen müssen wir ständig auf *Überraschungen* eingestellt sein.

Die Bedeutung der beiden einzelnen Inhalte hat sich im Laufe der Jahrhunderte mehrmals gewandelt.  
Bis vor etwa dreitausend Jahren gab es hierzu nur *Mythen, Götter und Geschichten*.  
Ein typisches Beispiel ist die Schöpfungsgeschichte der *Bibel*.  
Die *Griechen* machten dann eine *große Entdeckung*:  
Mit *kontextfreien Begriffen* und *zugehörigen Regeln* ließen sich Geschichten erzeugen.  
Heuten nennen wir diesen Zusammenhang Axiomatik.  
Die so erzeugten Geschichten sind eindeutig und lassen sich an der Wirklichkeit überprüfen.  
Deshalb sollte nur ein Axiom-System gültig sein. So entstand das Problem der Wahrheit von Weltbildern.  
Dabei ergab sich ein zusätzlicher Vorteil.  
Mittels der Begriffe und Regeln lässt sich das jeweilige verkürzt zusammenfassen.  
Diese Besonderheiten führten später zum Rationalismus und zum Reduktionismus.  
Der Zufall hatte wegen der Götter nur untergeordnete Bedeutung.  
Dennoch war er bei *Wagenrennen* und *Spiele*n u.a. mit Astragalen (Würfeläquivalent) immer vorhanden.  
Dabei bestimmten die *Götter* was zu geschehen hat. Hierfür zwei Beispiele.

# Ilias

Ein Beispiel für das Eingreifen der Götter stammt aus der Ilias XXIV, 25. Es dient der Begründung des Trojanischen Krieges, bei dem Troja (griechisch Ilion) 1184 v. Chr. in die Hände der Griechen fiel:

*Bei der Hochzeit des Peleus, dem Führer der Myrmidonen, mit Thetis, einer der Nereiden, warf Eris, die Göttin der Zwietracht – sie war nicht eingeladen – einem goldenen Apfel mit der Inschrift „für die Schönste“ unter die himmlischen Gäste. Die Entscheidung zwischen Hera, Athene und Aphrodite wurde Paris, dem Sohn des Königs Priamos von Troja, übertragen. Er sprach ihn der Aphrodite, der Göttin der Liebe, zu. Als Günstling der Göttin und erlangte er die Liebe der schönen Helena von Troja, der Frau des Königs von Sparta Menelaos und ging mit ihr nach Troja. Um das Menelaos angetane Unrecht zu rächen, wurde ein Kriegszug unter dem Kommando Agamemnons, dem König von Mykene, unternommen. Agamemnons Streitmacht hatte viele berühmte griechische Helden unter sich, die bekanntesten waren Achilleus, Patroklos, Ajax der Größere und Ajax der Kleinere, Teukros, Nestor, Odysseus und Diomedes.*



# Die Bibel

Ein zweites Beispiel liefert die Schöpfungslegende der Bibel: Gott ist hier zugleich Schöpfer und Gesetzgeber (moralisch und rituell). So beginnt Das erste Kapitel in der Genesis beginnt so:

*Im Anfang schuf Gott den Himmel und die Erde. Die Erde war wüst und leer, Finsternis lag über der Urflut, und der Geist Gottes schwebte über den Wassern. Da sprach Gott: „Es werde Licht!“ Und es ward Licht. Gott sah, daß das Licht gut war. Da trennte Gott Licht von Finsternis. Gott nannte das Licht Tag, die Finsternis aber Nacht. Es ward Abend, und es ward Morgen: ein Tag.*

*Dann sprach Gott: „Es entstehe ein festes Gewölbe inmitten der Wasser, und es bilde eine Scheidewand zwischen den Wassern!“ Gott bildete das feste Gewölbe und schied zwischen den Wassern oberhalb und unterhalb des Gewölbes, und es geschah so. Gott nannte das feste Gewölbe Himmel. Es ward Abend, und es ward Morgen: zweiter Tag.*

*Sodann sprach Gott: „Es werde das Wasser unterhalb des Himmels an einen Ort gesammelt, und das Trockene werde sichtbar!“ Und es geschah so. Gott nannte das Trockene Erde, und das zusammengeflossene Wasser nannte er Meer. Und Gott sah, daß es gut war. Da sprach Gott: „Die Erde lasse Grünes hervorsprossen, samentragende Pflanzen sowie Fruchtbäume, die Früchte bringen nach ihrer Art, in denen Samen ist auf Erden!“ Und es geschah so. Die Erde brachte Grünes hervor, samentragende Pflanzen nach ihrer Art und Bäume, die Früchte bringen, in denen ihr Same ist nach ihrer Art. Und Gott sah, daß es gut war. Es ward Abend, und es ward Morgen: dritter Tag.*

# Beispiele aus der Kunst

Bezüglich der Wahrnehmbarkeit der 12-Ton-Technik (Reihentechnik) schreibt THOMAS MANN (1875 - 1955) in seinem „Doktor Faustus“ S. 261/2):

*„Es geht auch so einfach nicht. Man müßte alle Techniken der Variation, auch die als künstlich verschrien, ins System aufnehmen, also das Mittel, das einmal der Durchführung zur Herrschaft über die Sonate verhalf. Ich frage mich, wozu ich so lange unter Kretzschmar die alten kontrapunktischen Praktiken geübt und so viel Notenpapier mit Umkehrungen, Krebsen und Umkehrungen des Krebses vollgeschrieben habe. Nun also, all das wäre zur sinnreichen Modifizierung des Zwölftönwortes nutzbar zu machen. Außer als Grundreihe könnte es so Verwendung finden, daß jedes seiner Intervalle durch das in der Gegenrichtung ersetzt wird. Ferner könnte man die Gestalt mit dem letzten Ton beginnen und mit dem ersten schließen lassen, dann auch diese Form wieder in sich umkehren. Da hast du vier Modi, die sich ihrerseits auf alle zwölf verschiedenen Ausgangstöne der chromatischen Skala transponieren lassen, so daß die Reihe also in achtundvierzig verschiedenen Formen für eine Komposition zur Verfügung steht, und was sonst noch für Variationsscherze sich anbieten mögen. Eine Komposition kann auch zwei oder mehrere Reihen als Ausgangsmaterial benutzen, nach Art der Doppel- und Tripelfuge. Das Entscheidende ist, daß jeder Ton darin, ohne jede Ausnahme, seinen Stellenwert hat in der Reihe oder einer ihrer Ableitungen. Das würde gewährleisten, was ich die Indifferenz von Harmonik und Melodik nenne.“*

*„Ein magisches Quadrat“, sagte ich. "Aber hast du Hoffnung, daß man das alles auch hören wird?"*

*„Hören?“ erwiderte er. „Erinnerst du dich an einen gewissen gemeinnützigen Vortrag, der uns einmal gehalten wurde, und aus dem hervorging, daß man in der Musik durchaus nicht alles hören muß? Wenn du unter ‚Hören‘ die genaue Realisierung der Mittel im einzelnen verstehst, durch die die höchste und strengste Ordnung, eine sternensystemhafte, eine kosmische Ordnung und Gesetzlichkeit zustande kommt, nein, so wird man's nicht hören. Aber diese Ordnung wird oder würde man hören, und ihre Wahrnehmung würde eine ungekannte ästhetische Genugtuung gewähren.“*

# Weitere Beispiele

In der *Musik* sind weiter zu nennen:

Zum STREICHQUARTETT schreibt GOETHE 1829 an ZELTER: „Man hört vier vernünftige Leute sich untereinander unterhalten, ...

HANSLICK definiert in seinem Buch (Dissertation) „Vom Musikalisch-Schönen“ Musik als *musikalisch bewegte Form*, d.h. wahrscheinlich die musikalische Gestalt wird systematisch verändert.

Hier wäre unbedingt eine systematische Analyse der Schriften von THEODOR W. ADORNO angebracht

In der *Literatur*: Im Roman „*Das Glasperlenspiel*“ von HERMANN HESSE (1877–1962) will der Held sämtliche Inhalte und Worte unserer Kultur formalisieren und scheitert schließlich.

Weiter sind vor allem die verschiedenen *Reimarten* bis zum *Heiko* zu nennen.

Bedeutsam dürften auch die Formen des *Krimis* sein.

Bei den *Bildern* und beim *Film* sind wahrscheinlich weniger Möglichkeiten vorhanden.

Dennoch Bild von *Escher*, *Bild-Illusionen* und *Karikaturen* enthalten bestimmt viele Möglichkeiten.

Insgesamt entsteht so eine Interessante *Verflechtung* von Kunst und Wissenschaft.

Darin liegt ein erheblicher *Anspruch der Informationsästhetik* begründet.

Und das verlangt letztlich die Betrachtung der *wissenschaftlichen Grundlagen*.

# Quellen des Rationalismus:

**ratio:** lat. Rechnung, Berechnung, Rechenschaft, Denken, Vernunft, Grund, Maß, Gesetzmäßig, Ordnung, Methode, Prinzip

**rationalis:** lat. vernünftig, vernunftgemäß, mit Vernunft begabt, schließend, folgernd, berechenbar.

**rational:** von der Vernunft

**rational:** zweckmäßig, auf größte Wirtschaftlichkeit berechnet

**Ration:** zugeteilte Menge

## Rationalismus

- betrachtet für den *Erkenntnisprozess* die *Vernunft* als wesentlich
- steht im *Gegensatz zum Empirismus*, welcher das Schwergewicht auf die Erfahrung und *sinnliche Wahrnehmung* legt.
- war *seit Griechen* irgendwie immer vorhanden
- eigentlicher **Begründer** gilt RENÉ DESCARTES.

# Quellen des Rationalismus:

## 1. Axiomatische Geschichten der *Griechen*:

HERAKLIT (550 bis 480 v.Chr.): göttliche Weltvernunft (logos) Grundlage für Weltgesetze

*Stoiker*: (≈ 500 v.Chr.) Das All durchdringende, vernünftige, ewige Gesetz

ARCHIMEDES (287 bis 212 v.Chr.) u.a.: benutzen Begriffe wie Theoreme, Prinzipie aber auch Regeln

LUKREZ (58 v.Chr.): unterscheidet kosmologisch-physikalisches (Naturgesetz) und juristisch-politisches Gesetz  
(natürliches d. h. Naturrecht)

## 2. Bei den *Babyloniern*

Bei Ihnen entstand um 600 bis 400 v.Chr. eine neue Denkweise.

Sie benutzen rein arithmetische Verfahren (Zeitreihen) und machten daraus Vorhersagen

Dies funktionierte bei z. B. *Mondfinsternissen*

Bei *Heuschreckenplagen* und *Erdbeben* dagegen nicht

Sie entwickelten jedoch keine allgemeinen, inhaltlichen Vorstellungen über die Welt und  
wussten daher nicht, warum es nur manchmal möglich

# Fortführung des Rationalismus

1. Mit AUGUSTINUS (354 - 430) Beginn der Christlichen Festlegung.
2. Mit Wilhelm von OCKHAM (1284 - ca. 1350) Einführung von Erfahrung.

Beginn des europäischen Rationalismus = OCKHAMs Rasiermesser

**Abschneiden** von nicht unbedingt Notwendigem für einfache, wiederholbare, kontrollierbare Beschreibungen:

- Hoffnung auf Einfachheit.
- Bestätigen durch Experimente (geplant)
- Glauben an die dem Menschen innewohnende (von Gott gegebene) Vernunft:
- Gesetze sind jedem einsichtig.
- Komplexitätszuwachs der Gesetze macht den Weg immer schwerer
- neuer Bewertungsmaßstab: Schönheit mathematischen Formeln, Kriterium der Einfachheit

3. JOHANNES KEPLER (1571 - 1630), RENÉ DESCARTES (1596 - 1650), GALILEO GALILEI (1564 - 1642).

Sie schaffen **Gesetze zur mathematische Abhängigkeit** zwischen physikalische messbaren Größen

So wird eine große Mannigfaltigkeit von Erscheinungen in ein **Bündel gefügt**.

4. ISAAC NEWTON (1642 - 1727) begründet und Vollendet die klassische Mechanik, **Dynamik**.

Er nimmt einen absoluten, unendlich ausgedehnten Raum und eine absolute und unendliche Zeit an.

Drei **NEWTON'sche Gesetze**

- Kräftefreie Körper bewegen sich gleichförmig mit konstanter Geschwindigkeit (Trägheitssatz)
- Kraft ist die Ursache von Beschleunigung: Kraft  $F = m \cdot b$
- Zu jeder Kraft gibt es eine gleich große Gegenkraft („actio = reactio“).

Entdeckung war die der universellen **Gravitation**

# Höhepunkt des Rationalismus

PIERRE SIMON LAPLACE (1749 - 1827):

Ab ca. 1700 gibt es also vielfältige mathematische Gesetze.

Sie erlauben sehr genaue Berechnungen in der Mechanik

So entsteht um 1776 die Idee des **LAPLACE'schen Dämons**

Er kennt *alle Gesetze* sowie die *Orte und Geschwindigkeiten aller Atome*.

Daher ist er imstande, alles Weltgeschehen in Vergangenheit und Zukunft zu berechnen.

Die Welt ist so eine völlig geheimnislose Welt.

Sie ist eine große Maschinerie, die einfach abläuft.

Zu dieser Anschauung gehören auch: *Automat und Maschine*.

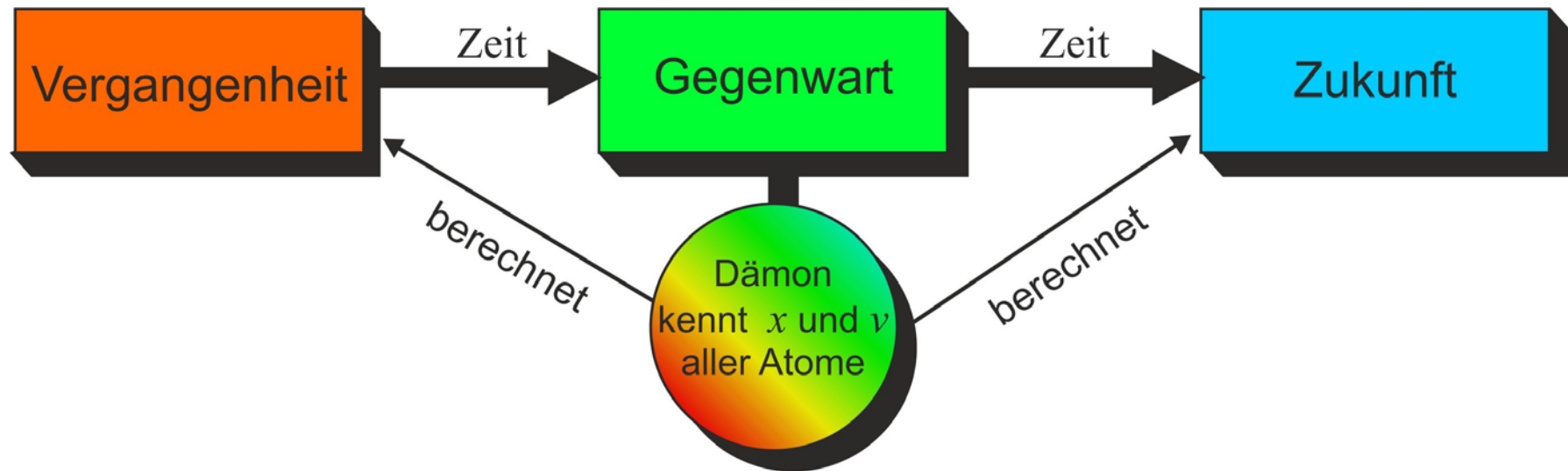
Betrachtung des Menschen als Maschine: Coppelia, Androiden, Roboter usw. sind eine Folge

LAPLACE wusste aber schon: Für den Menschen gäbe es dann *keine Freiheit und Verantwortung*.

Sonderfall bleiben die *statistischen Gesetze in der Thermodynamik*.

Sie sind nur eine *Mittelung über hohe Komplexität*

# Laplace'scher Determinismus



weltbildNeu.cdr h. völg 4.1.94/09



## LAPLACE 1776:

*„Der momentane Zustand des ‚Systems‘ Natur ist offensichtlich eine Folge dessen, was er im vorherigen Moment war, und wenn wir uns eine Intelligenz vorstellen, die zu einem gegebenen Zeitpunkt alle Beziehungen zwischen den Teilen des Universums verarbeiten kann, so könnte sie Orte, Bewegungen und allgemeine Beziehungen zwischen all diesen Teilen für alle Zeitpunkte in Vergangenheit und Zukunft vorhersagen.*

*Die Astrophysik, der Teil unseres Wissens, der dem menschlichen Geist zur größten Ehre gereicht, gibt uns eine wenn auch unvollständige Vorstellung, wie diese Intelligenz beschaffen sein müßte. Die Einfachheit der Gesetze, nach denen sich die Himmelskörper bewegen, und die Beziehung zwischen ihren Massen und Abständen erlauben der Analysis, ihren Bewegungen bis zu einem gewissen Punkt zu folgen; und um nun den Zustand dieses Systems großer Massen für zukünftige oder vergangene Jahrhunderte zu bestimmen, genügt es dem Mathematiker, daß ihre Orte und Geschwindigkeiten zu einem Zeitpunkt durch Beobachtung gegeben sind: Die Menschheit verdankt diese Möglichkeit den leistungsfähigen Instrumenten, die sie benutzt, und den wenigen Beziehungen, die man zur Berechnung braucht. Aber unser Unwissen um die verschiedenen Ursachen, die beim Werden eines Ereignisses zusammenwirken, sowie ihre Komplexität zusammen mit der Unvollkommenheit der Analyse verhindern, daß wir die gleiche Sicherheit bei den meisten anderen Problemen haben. Es gibt also Dinge, die unbestimmt sind, die mehr oder weniger wahrscheinlich sind, und wir versuchen die Unmöglichkeit, sie zu bestimmen, dadurch zu kompensieren, daß wir die verschiedenen Grade der Wahrscheinlichkeit bestimmen. Es ist also so, daß wir einer Schwäche des menschlichen Geistes eine der schönsten und genialsten mathematischen Theorien verdanken, die Wissenschaft von Zufall und Wahrscheinlichkeit.“*

## LAPLACE 2

Noch ausführlicher hat den Zusammenhang Laplace in der Einleitung seiner Wahrscheinlichkeitsrechnung benannt. Sie geht auf eine Vorlesung von 1795 zurück, die er hielt als er zusammen mit Lagrange vom Nationalkonvent zum Professor der Mathematik an der école normale ernannt wurde:

*„Eine Intelligenz, der in einem gegebenen Zeitpunkt alle in der Natur wirkenden Kräfte bekannt wären und ebenso die entsprechenden Lagen aller Dinge, aus denen die Welt besteht, könnte, wenn sie umfassend genug wäre, alle diese Daten der Analyse zu unterwerfen, in einer und derselben Formel die Bewegungen der größten Körper des Weltalls und die der leichtesten Atome zusammenfassen; nichts wäre für sie ungewiß, und die Zukunft wie die Vergangenheit wäre ihren Augen gegenwärtig.*

*Der menschliche Geist liefert in der Vollkommenheit, die er der Astronomie zu geben wußte, eine schwache Skizze dieser Intelligenz . ...Alle seine Anstrengungen in dem Suchen nach Wahrheit zielen dahin, ihn unaufhörlich jener Intelligenz zu nähern, die wir geschildert haben, aber er wird immer unendlich weit von ihr entfernt bleiben.“*

Oder auch noch

*„Wenn nämlich ein übermenschliches Geistwesen den gegenwärtigen Zustand aller Partikel des Universums erfassen könnte, wäre nichts mehr ungewiß, und die Zukunft wie die Vergangenheit würde ihm vor Augen liegen. Der menschliche Geist, der die Astronomie zu so hoher Vollkommenheit entwickelt hat, kann als schwacher Abglanz jener übermenschlichen Intelligenz angesehen werden.“*

# Regeln des Rationalismus

1. **Determinismus (Kausalität? s. u.!).** Jede Erscheinung/Wirkung hat eine (einzige) *Ursache*.  
Eine konsequente und iterative Vereinfachung selbst höchst komplexer Zusammenhänge (Reduktionismus) führt zum Erfolg.
2. **Stabilität: Geringe Änderungen** in der Ursache rufen auch nur *geringe Änderungen in der Wirkung* hervor (Kontinuumshypothese)
3. Experimentelle **Wiederholbarkeit**: Gleiche *Anfangsbedingungen* ergeben immer gleiche Abläufe (Beständigkeit der Welt).
4. **Gesetz**: *Mathematik* entspricht (ist) dem wirklichen Zusammenhang, vielfach auch: sie ist der von *Gott* gesetzte Zusammenhang und damit die Welt selbst (*gesetzmäßig* auch bei Zufall möglich!)

# Notwendige Grundlagen für LAPLACE-Dämon

Wenn die Welt	und wenn wir	dann wäre
<ul style="list-style-type: none"><li>• Deterministisch wäre</li><li>• nur wechselwirkende Teilchen enthielte</li><li>• die Newtonschen Bewegungsgleichungen uneingeschränkt gültig wären</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• alle Naturgesetze kennen würden</li><li>• alle Rand- und Anfangsbedingungen zu irgend einem Zeitpunkt kennen würden</li><li>• und beides mit absoluter Genauigkeit</li><li>• alle diese Daten Speichern könnten</li><li>• mathematisch und schnell genug alle Gleichungen lösen könnten</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• der Lauf der Welt in allen Einzelheiten eindeutig bestimmt (gleiche Ursachen erzeugt gleiche Wirkung)</li><li>• alle Ereignisse der Vergangenheit und der Zukunft korrekt zu berechnen.</li></ul>

# Gesetzmäßig und kausal

Trotz all dieser Einflüsse glauben wir fest an folgerichtige Erscheinungen.

Dieser Zusammenhang muss dabei nicht einmal wirklich existieren, wir glauben dennoch an die Kausalität.

Sie ist nicht wissenschaftlich begründet, sondern gibt nur eine Erklärung:

*Der Physiker und Meteorologe HEINRICH WILHELM DOVE hielt öffentliche Vorträge. Nach einem Vortrag fragte ihn jemand: Woher kommt es, dass wir in den Strassen von Berlin im Winter immer fünf Grad Kälte mehr haben als auf dem Felde.“ Er wollte sich mit dem Unwissenden nicht lange streiten und ihm erst sagen, dass es auf dem Felde kälter sei als in Berlin. Auch wollte der gute Mann das ja wohl nicht hören. Vielmehr wollte er für seine falsche Beobachtung eine Erklärung. Daher sagte DOVE: „Wegen des Heizens in den Häusern flüchtet die Kälte aus denselben auf die Strasse und kommt dort dichter zusammen.“ Der Mann war zufrieden und „erzählt's auf meinen Namen weiter. Meinetwegen. Ich bin ihn wenigstens los.“*

Aus dieser Sicht ist auch die Theorie der Versprecher nach SIEGMUND FREUD zu verstehen!

Es ist der 1. Teil seiner „Vorlesungen zur Einführung in die Psychoanalyse.“

So sagt jemand z. B.: „Mein Fräulein darf ich Sie begleidigen (statt begleiten).

# kritischer Rationalismus

Infolge der Probleme entstand der *Positivismus* des Wiener Kreises.

Er folgert, dass auch die Vernunft grundsätzlich fehlbar sei,

und daher die Wahrheit nicht mit letzter Sicherheit erkannt und behauptet werden könne.

KARL POPPER (Einführung der Falsifikation) auch HANS ALBERT, PAUL FEYERABEND, IMRE LAKATOS.

Zeitweilig gab es den *Vitalismus*, der heute kaum mehr Bedeutung hat:

Struktur und Funktion des Lebens kann nicht durch wissenschaftlich ergründete Gesetzmäßigkeiten erklärt werden kann.

Es gibt zusätzliche weder physikalisch noch chemisch fassbare „Lebenskraft“ (vis vitalis)

Aristoteles postulierte ähnlich lebenspendende Kraft, die er Entelechie nannte

# Relativitätstheorie

Sie stimmt weitgehend mit den klassisch rationalen Betrachtungen überein

- **Rationalismus** bleibt faktisch voll gültig, aber
- Es gibt **keinen Äther** (Träger für elektromagnetische Wellen)
- **Lichtgeschwindigkeit** ist eine absolute Grenze
- Verallgemeinerung (Relativität) von **Raum und Zeit**

Deshalb konnte sich EINSTEIN nicht an die Quantentheorie gewöhnen

Gott würfelt nicht.







# Gründe für Zufall und Statistik:

1. statistische Erklärung der thermodynamischen Irreversibilität.
2. probabilistische Quantentheorie.
3. Nützlichkeit der Shannon-Information.
4. Unfälle, Katastrophen usw. sind nicht vorhersehbar, ob wir betroffen sind, ist auch nicht vorher zu wissen. Wir müssen mit **Risiko** leben.
5. Zeitpunkt von Geburt und Tod sind für den Betroffenen nicht voraus bestimmbar.
6. Erwartung, subjektive Empfindung für das Eintreten von Ereignissen, Wetten.
7. Glaubhaftigkeit von Aussagen und Personen, Gültigkeit von Urteilen
8. Unvollständiges Wissen  $\approx$  Grad des Glaubens  $\approx$  Schätzung
9. Gestalt-Entstehung als zeitlich gerichteter Vorgang
10. Ökonomische Begriff des Nutzens
11. Übergang zu Big Data.

# Etappen des Zufalls

1. **Altertum**, Wagenrennen, Kinderspiele, danach große Pause
2. **Neubeginn** ab 16. Jh.: Versicherungen, Spiele (Risiko), theoretische Grundlagen
3. **Thermodynamik**, Entropie, Statistik, Mittelwertbildung
4. **Quantentheorie** (absoluter Zufall)

# Altertum

- 3000 Ägypten** Marmeln bei Kinder (Astragalen)
- 2000 Inder** vergnügen sich an Würfelspiel und Wagenrennen  
ähnliches gilt für Ägypten, später für **Griechenland** und **Rom**
- 800** In der **Ilias** kommen Spiele mit den Knöcheln vor
- 600** SOLON beschreibt psychischen Schaden durch **Astragalen**-Spiel
- 600** JAINA-Logik **Indien** kennt statistische Hintergründe  
**PLATON** (-427 bis - 347) behandelt in Dialogen subjektive Wahrscheinlichkeit  
**ARISTOTELES** (-384 bis - 322) beschreibt Spiel mit Astragalen

Hauptgründe warum Griechen *keine Wahrscheinlichkeitsrechnung* entwickelten:

- Astragale, Würfel und Lose dienen zur Erforschung des göttlichen Willen, gehören den Priestern, werden als Amulette und Idole getragen.
- systematisches experimentieren ist nicht sinnvoll, da es als künstliche Einschränkung empfunden wird

# Würfel usw.

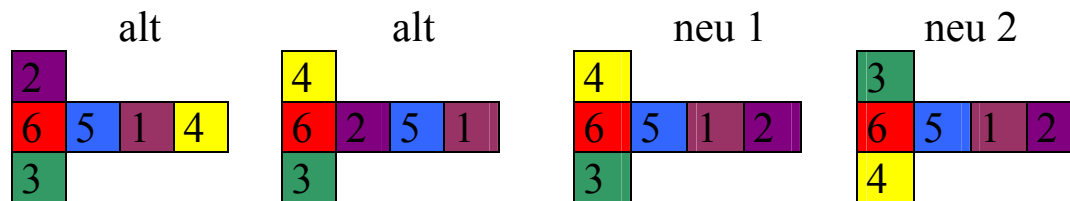
sehr früh **Nüsse** des Vibhidaka-Baumes mit 5 Seitenflächen

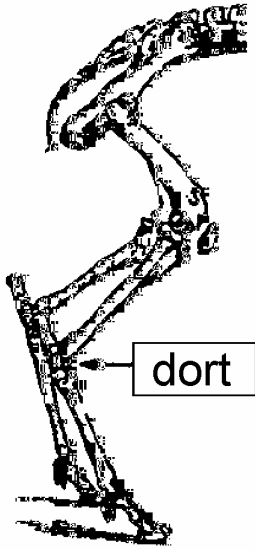

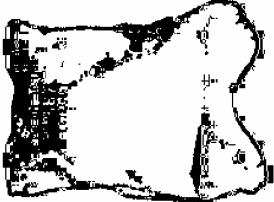
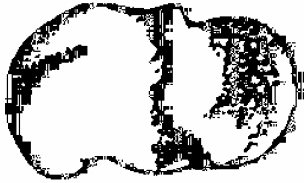

später beim **Jakatka-Spiel**: Tetraeder aus Holz, Elfenbein oder Gold  
mit den Werten 1 bis 4 belegt

Griechen und Römer: **Astragale** (αστραγαλος) vom Schaf oder Ziege

**Heutiger Würfel** ermöglicht  $6! = 720$  Belegungen,

sollen gegenüberliegende Zahlen den Wert 7 ergeben sind es noch 30,  
jedoch eigentlich nur noch zwei typische (neue):



			Name	% erprobt	Näherung	Wert
	1		υπτιον, hypton	36 - 50	≈40	3
			πρανες, pranes	≈40	≈40	4
	4		κωον, koon	≈ 10	≈ 10	6
			χιον, chion	4,5 - 13	≈ 10	1
6		<p style="text-align: center;">Astragale vom Sprungbein (Talus) Schaf oder Ziege</p>				
		<p><small>Ineichen, R.: Würfel und Wahrscheinlichkeit, Spektrum 1996</small></p> <p style="text-align: right;"><small>astragale.cdr h. völz 2.2.99</small></p>				
3						

# Spiele - Versicherungen

**1564** Gerolamo Cardano (1501 - 1576): „Liber de ludo aleae“ (Würfelspiel)

Blaise **Pascal** (1623 - 1662): „De aleae Geometriae“

**1654** Pascal-Fermat-Korrespondenz

Pierre de **Fermat** (1601 - 1665)

**1657** Christiaan Huygens (1629 - 1695): „De ratiociniis in ludo aleae“

**1671, 1693** werden Tabellen für die Rentenzahlung erstellt

**1708** P. R. de Montmort (1678 - 1719): „Essay d’analyse sur les jeux de hasard“

usw.

Notwendigkeit bei *Versicherungen* und Hoffnungen für das Verstehen und Beherrschen von *Spiele*n

## Neubeginn ab 16. Jh.

**1564** GEROLAMO CARDANO (1501-1576): „Liber de ludo aleae“ (Würfelspiel)

≈ **1600** gebraucht FRANCESCO ALBERTINI Begriff *Ereigniswahrscheinlichkeit*

BLAISE **PASCAL** (1623-1662): „De aleae Geometriae“

**1654** PASCAL-FERMAT-Korrespondenz, PIERRE DE **FERMAT** (1601-1665)

**1657** CHRISTIAAN HUYGENS (1629-1695): „De ratiociniis in ludo aleae“

**ab 1660** die Rede vom *Wahrscheinlichen* weit verbreitet (**Emergenz**-Phänomen)

**1671, 1693** es werden **Tabellen für die Rentenzahlung** erstellt

**1708** P. R. DE MONTMORT (1678-1719): „Essay d’analyse sur les jeux de hasard“

**1712** ABRAHAM DE MOIVRE (1667-1754): „De mensum sortis“

**1713** posthume von JAKOB BERNOULLI (1655-1705): „Ars conjectandi“

**1718** ABRAHAM DE MOIVRE: „The doctrine of chances“

**1751** LUDWIG EULER (1707-1783) Calcul de la probabilité dans le jeu de rencontre

**1763** TH. H. BAYES: Essay toward solving a Problem in the doctrine of Chances

**1773** FRIEDRICH II: „sa sacrée Majesté le Hazard“. geheiligte Majestät Zufall

**1787** J. G. HERDER benutzt zuerst in einem Brief das **Wort Wahrscheinlichkeit**

**1812** PIERRE SIMON DE LAPLACE „Theorie analytique des probabilités“

**1837** S. D. POISSON: Recherches sur la probabilité de jugements en matière ...

**1848** CH. GOURAUD: 1. Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung

**1866** J. VENN Wahrscheinlichkeit als *Grenzwert, Limes*

**1919** R. V. MISES Wahrscheinlichkeit als Grenzwert, Limes

**1927** H. LAMER: Lusoria Das Spielbrett

**1931** E. SITTIG vermutet, dass grammatikalische Fälle (Casus) = Fallen der Würfel

**1933** A. N. KOLMOGOROFF (1903-1987) *axiomatische Wahrscheinlichkeit*

**1939** J. HUIZINGA: Homo ludens



# Thermodynamik

- RUDOLF CLAUSIUS (1822 - 1888): mechanische Arbeit ist jederzeit vollständig in Wärme umwandelbar, aber nicht umgekehrt (**Entropie** 1854). Zeitrichtung. In geschlossenen Systemen werden Temperaturdifferenzen ausgeglichen. 2. Hauptsatz (1825 - 1850)
- RUDOLF CLAUSIUS, JAMES CLERK MAXWELL (1831 - 1879), LORD KELVIN UND LUDWIG BOLTZMANN (1844 - 1906) entwickelten die **kinetische Gastheorie** ca. 1859
- BOLTZMANN schafft mikroskopische, atomistische Erklärung der **Entropie** angeben.  $S = k \cdot T \cdot \ln(W)$  (1865)
- Auch im (dynamischen) **Gleichgewicht** gibt es immer statistische Schwankungen

## Damit treten in der Physik auf:

- **Wahrscheinlichkeit** ( $W$  von Mikrozuständen)
- **Irreversibilität**
- **Zeitpfeil**, obwohl ihn kein physikalisches Gesetz enthält.

# Hauptsätze Thermodynamik

## 1. Hauptsatz

Betrifft Energieerhaltung  $\Delta U = A + Q$ ; Änderung der inneren Energie (Zustand)

$U = \frac{3}{2} \cdot N \cdot k \cdot T$ ,  $A$  = Arbeit,  $Q$  = Wärme,  $N$  = Teilchenzahl; CARNOT-Prozess

Prozess ist *reversibel*, wenn er sich fortwährend im thermischen Gleichgewicht befindet

Es gibt kein Perpetuum mobile 1. Art, das dauernd Energie erzeugt, ohne sie der Umgebung zu entziehen

## 2. Hauptsatz KELVIN 1851

Es gibt keine periodisch arbeitende Maschine, die ständig Wärme in Arbeit wandelt.

**Entropie** als neuer Begriff:  $\Delta S = Q/T$ ;  $T$  = absolute Temperatur,  $k$  = BOLTZMANN-Konstante

$Q$  = Wärmemenge,  $W$  = Wahrscheinlichkeit von Mikrozuständen. Ergänzt 1872 BOLTZMANN durch  $S = k \ln(W)$ .

Zusammenhang mit physikalischer Ordnung. Gesetzmäßigkeiten sind durch Wahrscheinlichkeit bedingt.

$\Rightarrow$  Perpetuum mobile ist unmöglich (nicht beweisbar!)

Thermodynamik und Zeitpfeil entspricht **Streben nach dem Gleichgewicht**

Leitet BOLTZMANN aus Stöße der Atome her. Aber: auch im dynamischen Gleichgewicht gibt es Schwankungen

Mikro- und Makrozustände werden bei Informationstheorie behandelt.

## 3. Hauptsatz

Am absoluten Nullpunkt  $T = 0$  besitzt ein System keine Anregungsenergie mehr

Absoluter Nullpunkt experimentell nie erreichbar. Dort  $T \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta S \rightarrow 0$

# Kritik an BOLTZMANNs thermodynamischer Statistik

BOLTZMANNs thermodynamische Statistik wurde vor von zwei Seiten **kritisiert**

1. von ERNST MACH (1838-1916) und WILHELM FRIEDRICH OSTWALD (1853-1932)  
seine **Atomannahme**, die bereits in der Chemie durch DALTON galt (Stöchiometrie)
2. von HENRI POINCARÉ (1854-1912) und ERNST ZERMELO (1871-1953)  
seine **statistische** Irreversibilität und Ableitung des 2. Hauptsatzes aus reversiblen Mikrozuständen.

Führten schließlich zum Freitod von LUDWIG BOLTZMANN 05.09.1906

Heute sind beide Aspekte wegweisend für statistische Physik

**Planck** stellt dazu fest, dass sich eine neue wissenschaftliche Wahrheit normalerweise:

*„nicht in der Weise durchzusetzen pflegt, dass ihre Gegner überzeugt werden und sich, als belehrt erklären, sondern vielmehr dadurch, dass die Gegner allmählich aussterben und daß die heranwachsende Generation von vornherein mit der Wahrheit vertraut gemacht wird“.*

# Zeitpfeil

Alle Gesetze der Physik ermöglichen keine Zeitrichtung, Dennoch erleben wir sie ständig (Film!)

Aus diesem Grunde entwickelten PAUL und TATIANA EHRENFEST 1907 ein Gedankenexperiment.

Es kann als Spiel behandelt werden und verlangt dann:

- zwei Urnen,  $n$  nummerierte Steine und einen Zufallsgenerator für die  $n$  Zahlen und die Regel
- Wird die Zahl  $x$  gewürfelt, so hat der Stein (Floh) der Nummer  $x$  die Urne (den Hund) zu wechseln.

In einer Vulgärversion wurden die Urnen durch Hunde und die Steine durch Flöhe ersetzt.

Daher rührt der Name „**Hund-Flöhe-Modell**“

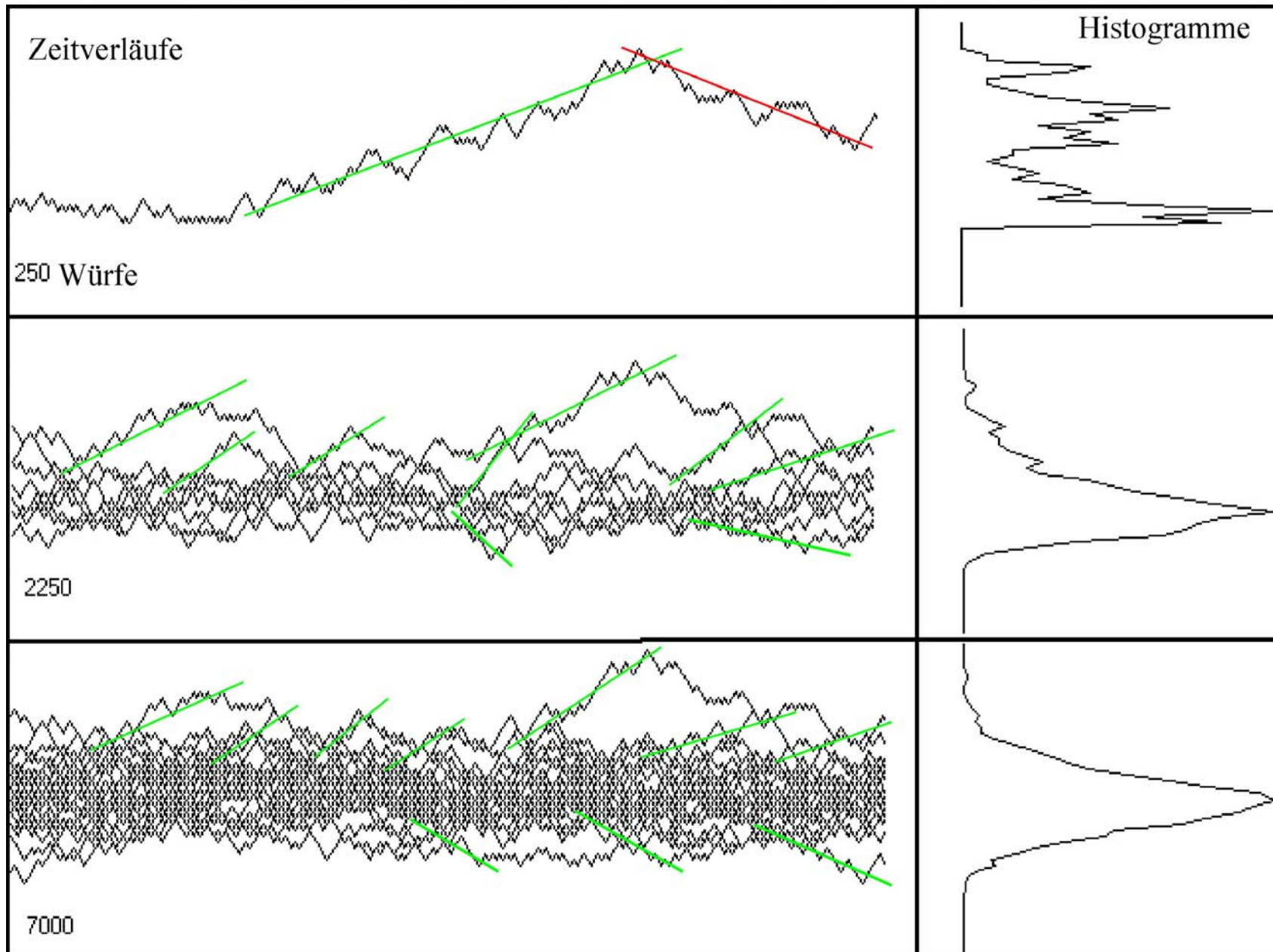
Bei diesem Spiel lassen sich zwei sehr unterschiedliche Ergebnisse beobachten:

1. Im hinreichend langen **zeitlichen Mittel** befindet sich in jeder Urne die Hälfte der Steine. Bei einer großen Versuchszahl ist die Abweichung sehr klein.
2. In **ausgewählten**, aber immer wiederkehrenden **Zeitausschnitten** treten sehr große Abweichungen von der Gleichverteilung auf.

Dies zeigt das folgende Bild einer Rechner-Simulation

Diese immer wieder auftretenden **zeitweiligen Ausreißer** führen zu der Annahme, dass die Erde und damit die Menschheit in so einer Raum-Zeit-Oase lebt.

Der Zeitpfeil würde dann für eine gewisse Zeit auch die Abnahme der Entropie im Sinne einer „Höherentwicklung“ zulassen.



# Quantentheorie

14.12.1900 stellt MAX PLANCK Ergebnis bzgl. Strahlung des schwarzen Körpers vor  
Energie existiert nur gequantelt. Mittelbar gelangt dadurch Zufall in die Physik ein  
Die ersten 3 Rationalismusregeln sind so extrem stark eingeschränkt.  
PLANCK: „Formel war ein Akt der Verzweiflung“

1913 NILS BOHR (1885 - 1962): Planetenmodell der Atome, Sprung = Licht, erklärt Spektren

1925 WERNER HEISENBERG (1901 - 1975) entwickelt Matrizenmechanik

1926 Brief EINSTEIN „Gott würfelt nicht“

1926 HEISENBERG formuliert seine Unschärfe-Relation  $\Delta x \cdot \Delta p \geq h/2 \cdot \pi$

1926 SCHRÖDINGER formuliert Wellengleichung der Quantentheorie

1927 Born bestimmt Wellenfunktion der SCHRÖDINGER-Gleichung als Aufenthaltswahrscheinlichkeit

1938 22.12. OTTO HAHN spaltet den Uran-Kern

Die Quantentheorie ist (noch) nicht für die Kunst relevant! Kann also weiterhin entfallen.

# Das neue Weltbild

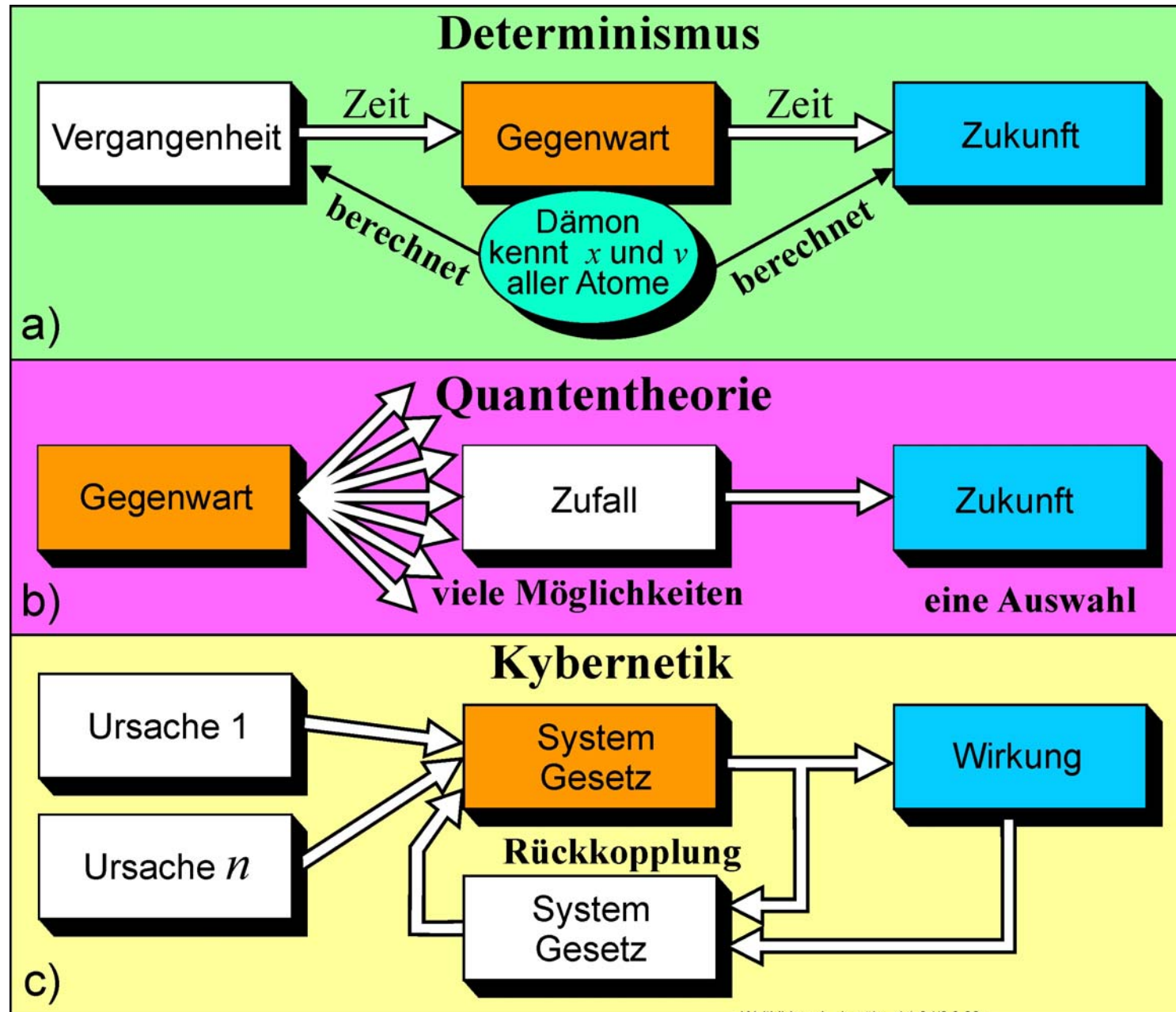
Es muss den Zufall berücksichtigen, wird aber später noch einmal durch *Kybernetik* und *Informatik* verändert. Insgesamt gilt aber, dass Zufall und Determinismus gemeinsam auftreten können.

## Informationstheorie

CLOUDE ELWOOD SHANNON (30.4.1916 - 24.2.2001)

A Mathematical Theory of Communication)

Bell Systems Technical Journal 27 (Juli 1948) S. 379-423 und (Oktober 1948) S.623 - 656. (eingereicht 24.3.1940)



Weltbilder.cdr h. vözl 4.1.94/6.3.08



# Zufall, zufällig

Betrifft (in der Philosophie) Etwas:

1. das durch den Verlauf äußerer Umstände und innerer Natur der Dinge bedingt und **nicht notwendig** ist
2. das **sein und nicht sein kann** und so das Gegenteil von Notwendigkeit ist.
3. das unberechenbar oder unvorhersagbar ist, weil dessen *Gesetzmäßigkeiten (noch)* **nicht bekannt** oder in so **großer Vielfalt** vorhanden sind, dass keine Zusammenhänge Ursache→Wirkung erkennbar sind.
4. das – wie in der Quantentheorie **objektiv vorhanden** aber – nicht beeinflussbar sein.
5. ist gegen **Unberechenbarkeit, Unvorhersagbarkeit** schwierig abzugrenzen.
6. besitzt einen relativ engen Zusammenhang mit dem **freien Willen**  
⇒ Gegenteil von eineindeutiger Ursache-Wirkungs-Relation = LAPLACE'scher Dämons bzw. Determinismus
7. besitzt **kein Gedächtnis**, tritt also immer wieder neu und unabhängig vom Vorher auf.  
Selbst wenn bereits  $x$ -Mal eine „5“ gewürfelt wurde, tritt sie beim nächsten Wurf mit  $W = 1/6 \approx 0,166...$  auf.
8. Zufall hat **Gesetze**, wenn auch eigenständige Daher gehört er zum Gesetzmäßigen

## Im *täglichen Leben*

Menschen fällt es **schwer an Zufall zu glauben**: es muss doch Ursachen geben

Bauer pflanzt einen Baum und findet dabei **zufällig** einen goldenen Mörser (bereits bei ARISTOTELES).

Jemand geht zum Bahnhof und trifft dort **zufällig** einen alten Freund

Erwartungen können aber enttäuscht werden. SIGISMUND FREUD (1856 – 1939) → Witz und Tragik

Wird nicht benutzt, wenn Etwas eintritt, was ausdrücklich vermieden werden sollte

z.B. wenn jemand einen Nagel einschlagen will und sich dabei kräftig auf den Daumen schlägt,  
gilt dann eher als ungeschickt.

# Etymologie

**Zufall:** 15. Jh. zuoval: Anfall, Angriff, das Zuteilwerden; 16. Jh. starkes Andrängen, Zulauf, Parteinahme, Beistand, Beifall, Ereignis, Vorkommnis; 17. Jh. zufallen, zuteil werden

## Wichtige, dazu gehörende Begriffe

**Determinismus:** *Lat. determinare* begrenzen, beschränken, beschließen, *de-* von, weg; *terminus*, Ziel, Ende, Grenzzeichen, Grenze, Termin

**Häufigkeit:** von Haufen  $\approx$  viel, Menge

**Kausalität:** *Lat. causalitas* Ursächlichkeit

**Korrelation,** *Lat. correlatio* Wechselbeziehung, *con-* mit; *relatio* Bericht(erstattung), *relativus* bezüglich

**Probabilistik:** *Lat. probabilitas* bezieht sich auf Urteile, Aussagen; Adjektiv *probus* = gut, ehrlich; Auch **Probe**, englisch to prove, to probe

**Rationalismus:** *Lat. ratio* Rechnung, Berechnung, Rechenschaft, Denken, Vernunft, Grund, Maß, gesetzmäßig, Ordnung, Methode, Prinzip; *rationalis* vernünftig, vernunftgemäß, mit Vernunft begabt, schließend, folgernd, berechenbar

**Risiko:** *Ital. rischio, span. risco* Klippe

**Statistik:** *Lat. statisticus* staatswissenschaftlich

**Stochastik:** *Grie. stochazesthai* mutmaßen, vermuten

**Wahrscheinlichkeit:** von wahr und scheinen,  $\rightarrow$  Wahrsager

**Beachten!:** Vergangenheit steht fest (Speicherung), meist nicht zu ergründen ob Zufall oder Determinismus  
In *frühen Kulturen bestimmten* Orakel, Los, Astragale, Götter zufälliges Geschehen.

# Chaos $\Leftrightarrow$ Zufall

*Grie.:* **chaino** klaffen, sich auftun, gähnen

**Mathematik, Physik** = mehr oder weniger zufällige Systemzustände (Chaostheorie)

Sehr kleine Veränderungen der Anfangsbedingungen haben völlig unterschiedliche Auswirkungen

Bewegung eines doppelten Pendels kann völlig unvorhersagbar, chaotisch sein

1961 EDWARD NORTON LORENZ (\*1917) bzgl. der Wettergleichungen: Butterfly- bzw. Schmetterlingseffekt

heutiger Flügelschlag eines Schmetterlings in China → morgen Orkan in den USA

Chaos in den **Schöpfungsmythen** fast aller Völker und Religionen vor, s.o. Christentum

Wenn sich aus so einem chaotischen Anfangszustand Etwas (gesetzmäßig) entwickeln soll, 2 Bedingungen nötig:

- Er muss **reich genug** sein, um von sich aus weitere Strukturen zu erschaffen und
- er muss **arm genug** sein, damit kein Hinterfragen zum Chaos sinnvoll erscheint.

# Individueller Zufall

## Bei Kindern gilt etwa

5-6 Jahre:	Es entsteht eine Intuition für Zufälliges
7 Jahre:	Es bildet sich eine Idee für den Zufall aus
11-12 Jahre	Es entsteht ein quantitativer Wahrscheinlichkeitsbegriff, u.a. in Richtung des Gesetzes der großen Zahl und der Wahrscheinlichkeit
13-14 Jahre	Schülern wurde Aussage eines Richters „ <i>Der Angeklagte ist wahrscheinlich schuldig</i> “ vorgegeben. Danach akzeptierten sie folgende Aussagen (subjektive Wahrscheinlichkeit s. u.):
Fast, aber nicht ganz gewiss	29 Schüler 52 %
Eher schuldig als unschuldig	15 Schüler 27 %
50:50 = schuldig:unschuldig	8 Schüler 15 %
vollkommen gewiss schuldig	4 Schüler 7 %

## Bei Erwachsenen

Allgemein hängen mit dem Zufall hängen *Erwartungen, Hoffnungen und Sorgen, Glück – Pech* zusammen.  
Wichtig sind *Werkzeuge*, wie Würfel, Karten (Mischen), Lotterie, Knobeln, Roulett, Urnen usw.  
Recht spät wird bemerkt: *Vieles im Leben ist zufällig*, z.B. Geburten, Todesfälle und Unfälle (Schicksal)  
Sehr spät werden „Wahrscheinlichkeiten“ berechenbar.  
Selbst bei Menschen, die weder Schreiben noch Lesen können, ist dennoch ein Gefühl für Zufall oder Wahrscheinlichkeit vorhanden

# ODO MARQUARDT (1928 - 2015)

Vier Bücher für philosophisch-menschliche Sicht des Zufalls

Uns widerfährt etwas, was wir nicht gewollt haben

Zur **Würde** des Menschen gehört, dass er das Zufällige leiden kann; und

zu seiner **Freiheit** gehört die Anerkennung des Zufälligen

**Frei ist**, wer lachen und weinen kann; **Würde hat**, der lacht und weint

Ein Minimum an Chaos ist die Bedingung der Möglichkeit der **Individualität**

**Unglück** wird durch **Glück** kompensiert (Summe = Null = alle Menschen sind gleich!?)

**Feste feiern** ist menschlich; und ich glaube, es ist nur menschlich.

Menschen sind nicht absolut, sondern durch den Tod endlich

Wir leben nicht lange genug, unser Tod ist stets schneller als die absolute Orientierung;

große oder gar absolute Sprünge sind unmenschlich

DESCARTES „provisorische Moral“: Ohne vorhandene **Üblichkeiten** (Traditionen, Sitten usw.) können wir nicht leben

Stets müssen mehr Üblichkeiten aufrechterhalten als verändert werden, Die Beweislast hat stets der Veränderer

**Kunst** bewältigt (vielleicht) Beliebigkeitskontingenz, die **Religion** bewältigt (vielleicht) Schicksalskontingenz

Alles erzwingt **Gewaltentrennung** nach MONTESQUIEU: Legislative, Exekutive und Jurisdiktion

Abnehmende (subjektive) Sicherheit  
Zunehmende Übereinstimmung mit der Realität →

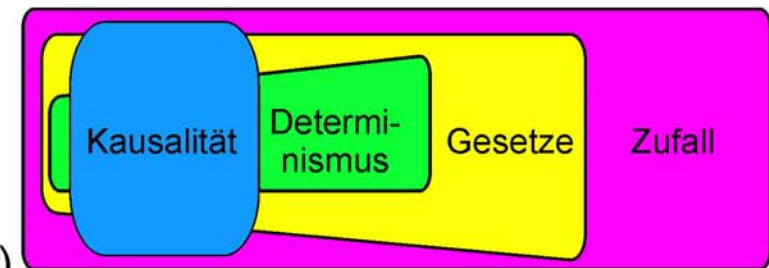
	Kausalität	Determinismus	Gesetze	Zufall
Inhalt	<b>Subjektive</b> Annahme von Ursache und Wirkung	Annahme (Beweis) in der <i>Natur</i> existierender <b>Ursache-Wirkungs-Relationen</b>	vorwiegend <b>mathematisch</b> formulierte <b>Zusammenhänge</b>	<b>keine</b> Ursache-Wirkungs-Zusammenhänge <b>erkannt</b> oder <b>möglich</b> .
Besonderheiten	Fällt nur auf, wenn nicht erfüllt	klassische Physik und Naturwissenschaften	Ursachen müssen nicht bekannt oder vorhanden sein	Wahrscheinlichkeit, Statistik, Stochastik
Beispiele a)	Erkältung → Schnupfen, Regenmacher	Gravitation, Elektrodynamik, Laplacescher Dämon	Thermodynamik, Quantenphysik, Radioaktivität, Reibung	Würfel, Urne, Spielkarten, Los

#### Rationalismus, Reduktionismus



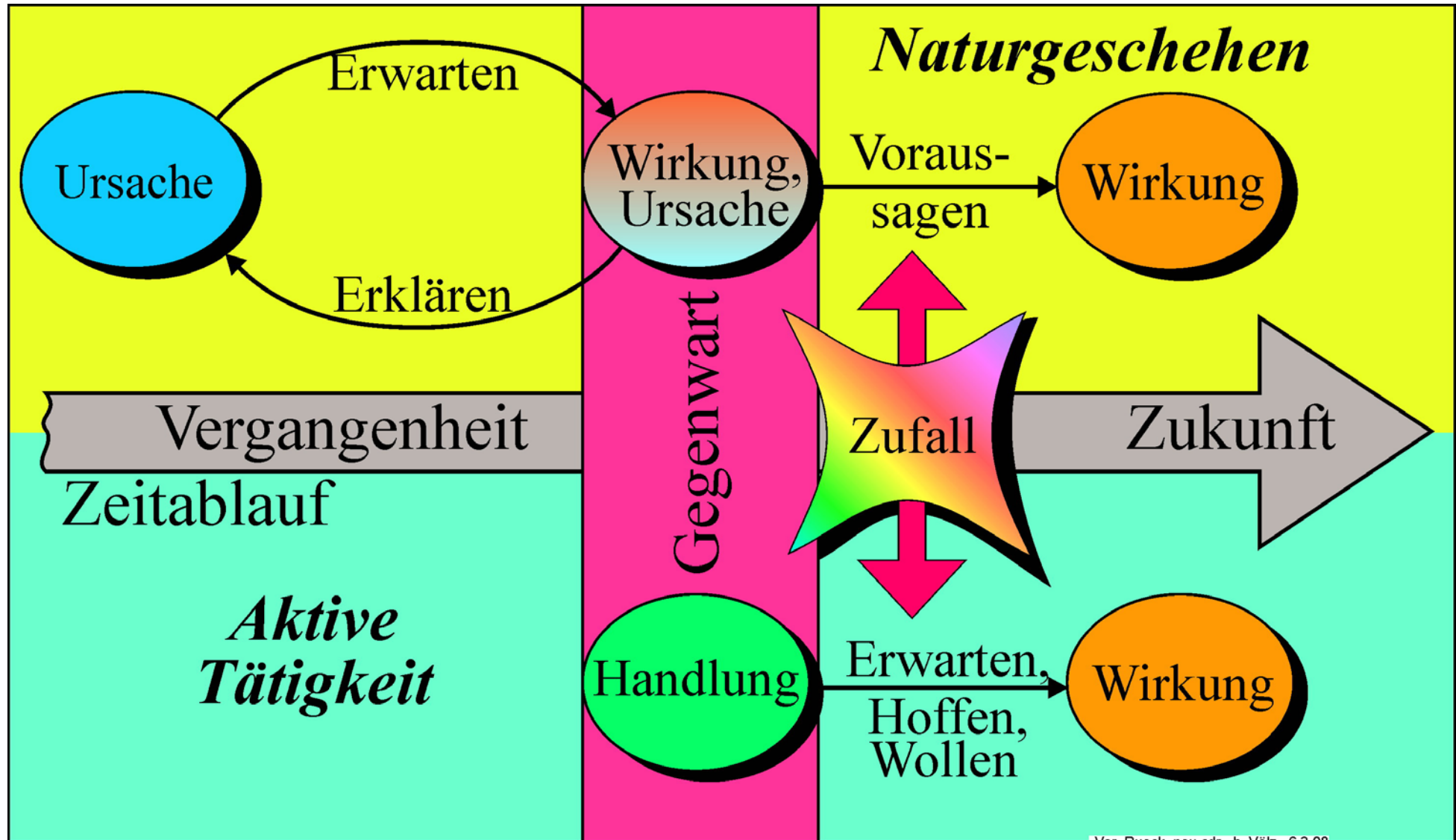
Antike: "Dies sei die Wahrheit!"  
Kriterium der Praxis erst nach dem Mittelalter

#### Häufigkeit des Auftretens



Sicherheitneu.cdr H. Völz 3.8.95/01/08

Bezüglich der *Vergangenheit* ist keine Aussage möglich: Zufall oder Gesetz?



Vor\_Rueck\_neu.cdr h. Völz 6.3.08

# Definitionen von Wahrscheinlichkeit

Wahrscheinlichkeit betrifft *Messwerte* für das Auftreten eines Zufalls

<b>klassisch</b>	$W(A) = \frac{\text{Anzahl günstiger Elementar-Ereignisse für } A}{\text{Anzahl aller möglichen Elementar-Ereignisse}}$	setzt zumindest statistische Stabilität voraus; Häufigkeiten bringen Probleme
<b>statistisch</b>	Grenzwert der relativen Häufigkeiten für $\infty$ viele Proben	Die statistische Stabilität notwendig; nur zu brauchbare (zufällige) Näherung; Grenzwertsätze beachten!
<b>geometrisch</b>	Ereignisse werden als Punkte bzgl. Intervall, Fläche, Volumen aufgetragen. Der relative Anteil entspricht der Wahrscheinlichkeit	ähnelt der klassischen Definition, wenn sie geometrisch veranschaulicht wird
<b>axiomatisch</b>	operiert mit Mengen; 1933 von ANDREJ NIKOLAJEWITSCH KOLMOGOROW (1903 – 1987) eingeführt	ist ziemlich abstrakt



# Definition der axiomatischen Wahrscheinlichkeit

Grundbegriffe	Beispiele dafür (Würfel)
Es gibt Elementar-Ereignisse $A_1, A_2$ , Sie gehören einem <b>Ereignisfeld</b> $\mathbf{A}$ an	die Augenzahlen beim Würfeln $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Es gibt ein sicheres Ereignis $\Omega$	Es wird eine beliebige Zahl gewürfelt
Es gibt das unmögliche Ereignis $\emptyset$	Es wird nichts erwürfelt

Auf  $\mathbf{A}$  wird ein **Wahrscheinlichkeitsfeld**  $(\mathbf{A}, P)$  bzw.  $(\Omega, \mathbf{A}, P)$  mit den folgenden **Axiomen** definiert:

1. Zu jeden Ereignis  $A_v \in \mathbf{A}$  gibt es eine reelle Zahl  $P(A_v)$  mit  $0 \leq P(A_v) \leq 1$ , heißt **Wahrscheinlichkeit**  
z. B. Würfel:  $P(\mathbf{1})=1/6, P(\mathbf{2})=1/6 \dots P(\mathbf{6})=1/6$
2. Die Wahrscheinlichkeit des **sicheren Ergebnisses** ist 1
3. **Additionsaxiom:**  $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$ , z. B.  $P(\mathbf{1} \cup \mathbf{2}) = 1/6 + 1/6 = 1/3$

Hieraus werden **alle Sätze** abgeleitet.

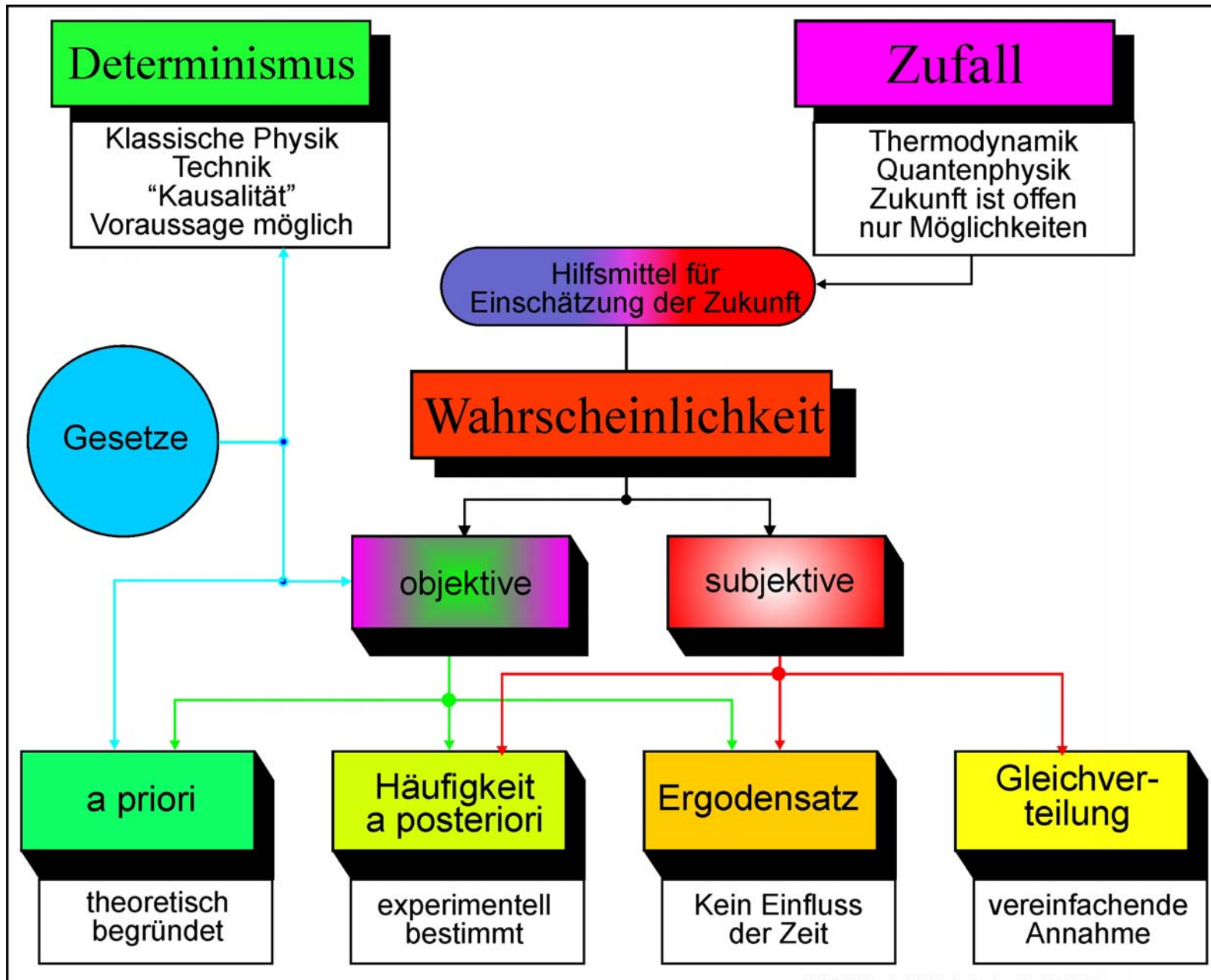
Oft noch die **bedingte Wahrscheinlichkeit:**  $A_1$  tritt unter *der* Bedingung ein, dass  $A_2$  bereits eingetreten ist:

$$P(A_1 / A_2) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)}$$

# Vom Zufall zur Wahrscheinlichkeit

Es sind zu unterscheiden:

1. ***apriori***, Lat. ***prior*** früher, erst, vorder. Der Zahlenwert steht bereits vor dem Versuch fest  
Meist ***physikalisch bedingt***, z. B.: Würfel, Urne, Kartenspiel, Los, Knobeln, Quantentheorie, thermisches Rauschen, viele Störungen.
2. ***a posteriori***, Lat. ***poster*** nachfolgend, besser ist die Bezeichnung ***Häufigkeit***  
Erfolgt durch ***Abzählen***, erst nach dem Versuch angebbbar, ***repräsentative*** Stichproben wichtig (s.u.)  
Infolge ***Gesetz der großen Zahl*** nähert sie sich im Mittel für stationäre Erscheinungen einem ***Grenzwert***
3. ***Gleichverteilung***, vereinfachte Betrachtung als grobe Näherung,  
Für alle Größen wird einfach der gleiche Zahlenwert angenommen. Bei Shannon-Entropie oberer Grenzwert.
4. ***Ergodensatz*** beachten, gleichwertig serielle und parallele Ereignisse  
Zeitlicher Mittelwert muss mit Ensemble-Mittelwert übereinstimmen  
Nicht ergodische Prozesse sind z. B. Sprachen, deren Statistik in der Zeit ändert



Zufall\_Wahrscheinlichkeit.odr h. vözl 27.12.09

# Fragestellungen zur Wahrscheinlichkeit

## Größe der Wahrscheinlichkeit

Dass Leben entsteht?	bedingte Wahrscheinlichkeiten
Dass es außerirdischen Leben gibt?	Kombinatorik
Dass man im Lotto gewinnt?	Stabilität der Statistik
Wahrheitsgehalt eines Gerüchts usw.?	Inhaltliche Abschätzung

## Gewinnen von einzelnen Zahlenwerten

Wie lange hält ein Autoreifen?	Messwerte, Experimente, zeitverkürzende Verfahren
Wann tritt ein Speicherfehler auf?	MTBF mean time between failure, Fehlerrate
Wann muß eine Anlage gewartet werden?	Auswahl $\Leftrightarrow$ Betriebssicherheit
Wie kann man die Sicherheit erhöhen?	kalte und heiße Reserve; Reihen-, Parallelschaltung

## Nutzung von Zahlenreihen

Wie groß ist der Mittelwert, die Streuung usw.?	Statistische Kenngrößen mit/ohne Gewicht/Häufigkeit
Gehorchen sie einem Gesetz?	Korrelation mit einer Gerade oder anderen Funktionen
Welches Modell ist gültig, brauchbar angepasst?	Ermittlung einer Formel, eines Gesetzes. Big Data
Kann aus einer Zeitreihe etwas gefolgert werden?	Prognose, Rückblick, Beginn.

## Anwendungen

**typisch:** Fehler-Korrektur, Mutation, Zuverlässigkeit, Warteschlangen, Bedientheorie, Informationstheorie usw.  
Hier Schwerpunkt bzgl. Kunst

## Wahrscheinlichkeit *Betrifft Objekte*

Es werden meist mess- oder zählbare Daten erhoben

Typen bzgl. der zufällige Auswahl	Beispiele
<i>Eigenschaft</i> aus einer Klasse von Eigenschaften <i>Ausprägung</i> einer Eigenschaft <i>Diskreten Zahl</i> aus einem Zahlenbereich <i>reellen Zahl</i> aus einem Kontinuum	Mensch Geburt: Junge v Mädel Farbe: rot, grün, blau ... Würfel: 1, 2, .. Pegel eines Rauschsignals

U.a. gibt es **2 Arten von Wahrscheinlichkeit**

*Lat. aleator* Würfel, Glücksspieler; *Grie. ont-* das Seiende, Wirkliche, Wahre, *Grie. epistole*, *Lat. epistola* Brief

<b>aleatorisch</b> = statistisch = <b>objektiv</b> $\approx$ kartesisch $\approx$ logisch = physikalisch = empirisch $\approx$ ontisch	<b>epistemisch</b> = persönlich = <b>subjektiv</b> = psychologisch
Wird immer <b>numerisch</b> angegeben, z.B. in % <b>Messen, Zählen</b> Setzt grundsätzliche <b>Regellosigkeit</b> voraus (Quantentheorie) Halbwertszeit von Radioaktivität, chemischen Prozessen usw. <b>Zufallsexperimente</b> und <b>Chancen</b> bei Glücksspielen $\Rightarrow$ empirisches <i>Gesetz der großen Zahl</i>	Kann <i>verbal</i> benannt werden <b>Schätzen, Behaupten</b> Grad des <i>Vertrauens, Glaubens</i> <b>Gültigkeit</b> einer Meinung <b>Glaubwürdigkeit</b> einer Aussage <i>Bereitschaft zu wetten</i>

# Beispiele subjektiver Wahrscheinlichkeit

Subjektive Wahrscheinlichkeiten beeinflussen deutlich unser Verhalten.

CUBE vermutet: Grossteil des Lernens besteht darin, subjektive Information an objektive anzugleichen

Meist werden kleine Wahrscheinlichkeiten zu groß und große zu klein geschätzt

Vom Gefühl kein Unterschied: vor Operation: Sterberate 7 % oder Überlebensrate von 93 % angekündigt wird

Lotterie spielen insbesondere bei hohem Jackpot

Wetten, Lotto usw. machen auch **Freude**, verzerren dadurch die Wahrscheinlichkeit zusätzlich

Wenn ein **Gewinn** lockt werden wir leicht zu Abenteurern, droht **Verlust** werden wir konservativ

Wird absichtlich genutzt in Spielhallen, z.B. **einarmiger Bandit** in Spielhallen

Viele Geräte dicht beieinander, seltener Gewinn aber viel Lärm → fast ständigen Lärm → täuscht oft Gewinne!

Wichtigen Voraussetzungen für **Glück**: Geld, andere Menschen, Selbstverwirklichung usw.

Für persönliches **Unglück**: Krankheit, Arbeitslosigkeit usw.

Widerspruch erklärt: beim Glück wird Gesundheit unterbewusst vorausgesetzt, steht nicht zur Diskussion

## verbal ⇔ numerisch

Beispiel experimentell: beim Schwarzfahren oder Cannabis-Gebrauch erwischt zu werden

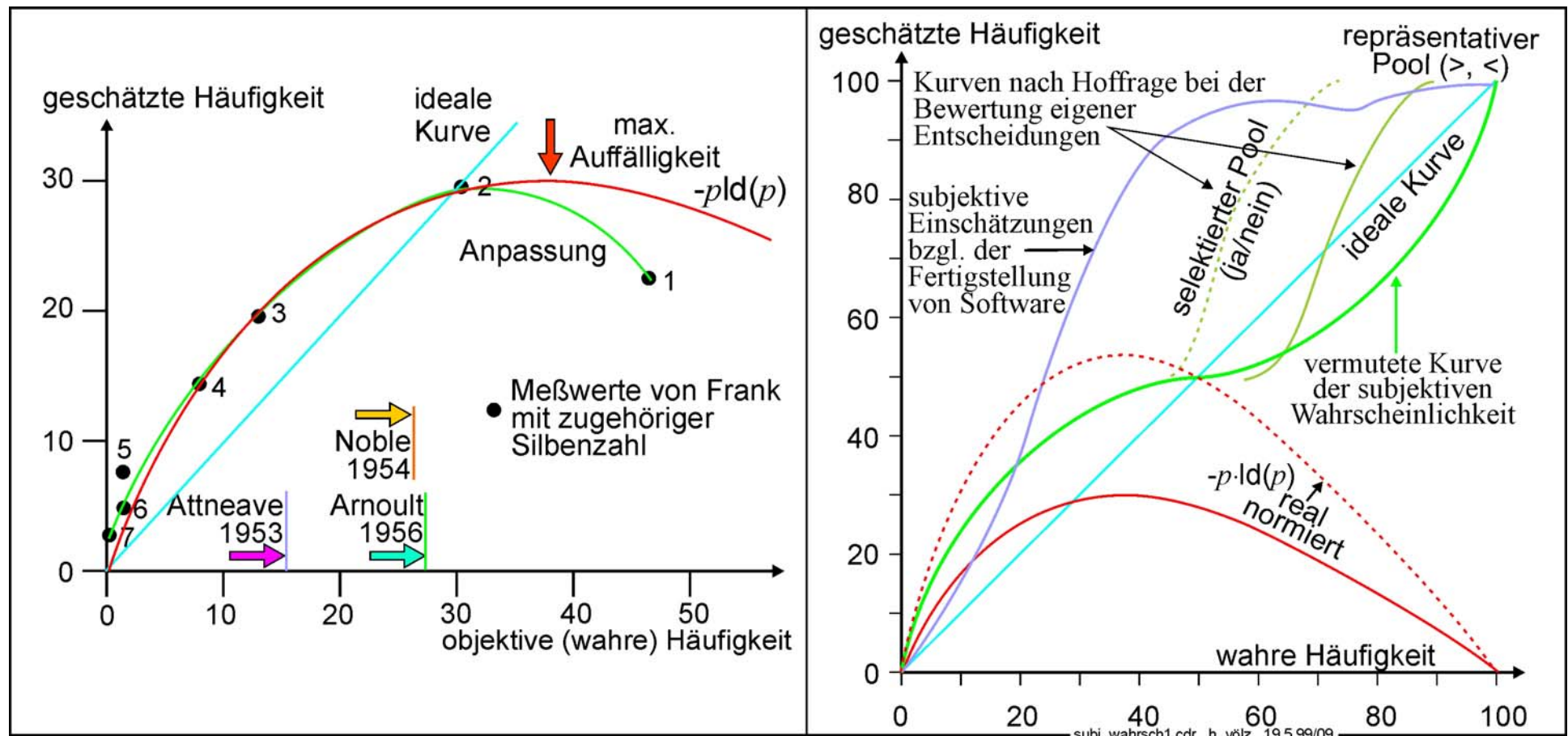
Sehr unwahrscheinlich	eher unwahrscheinlich	Halbe-halbe	eher wahrscheinlich	sehr wahrscheinlich
9,8 %	12,8 %	34,8 %	35,2 %	64,8 %

# Experimentell

u.a. **HELMAR FRANK** (II, 124 ff)

Textseite aus Musils „Mann ohne Eigenschaften“, Probanden mussten je Silbe auf den Tisch klopfen

Anschließend wurden sie – ohne dass sie vorher das ahnten – nach der Häufigkeit der Silbenzahl im Text befragt



# Unsicherheit bei Schätzungen

Es ist frustrierender ein Flugzeug mit fünf Minuten als mit 2 Stunden zu verpassen.

Wer eine „1“ würfeln will, würfelt vorsichtig, bei „6“ mit großem Kraftaufwand.

Beim Zusammentreffen von 24 Personen besteht 50 % Wahrscheinlichkeit → 2 Teilnehmer am gleichen Tage Geburtstag

**Witz:** Bombe im Flugzeug  $10^{-3}$ . Besser: Sie nehmen eine Bombe mit, 2 Bomben nur  $10^{-6}$

**U-Bahn-Beispiel:** 2 Freundinnen: Richtungsauswahl 1:1 gleichviel Züge, dennoch 1:5 für eine Richtung?!

## Sichere Methode in Monte Carlo Geld zu gewinnen

Spiel auszuwählen, mit der Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{2}$  zu gewinnen, also etwa rouge et noir

Einsatz = 10 €. Bei Gewinn erneut 10 € setzen, bei erneutem Gewinn wieder 10 € usw. Beim ersten Verlust Casino verlassen. Täglich wiederholen.

Mögliche tägliche Verlust = 10 €, mögliche tägliche Gewinn liegt aber bei 10, 20, 30 usw. €



# Ankereffekt

Anwendung in **Propaganda**, z. B. 2. Golfkrieg von 1991 Bush-Administration:  
Offiziell Todesopfer unter der irakischen Zivilbevölkerung meistens auf 2, 3 oder 12 benannt.  
Diese Zahlen meist nicht geglaubt → vermutet wurde vielleicht ein Faktor 100, kaum 1000.  
Real waren es rund 10 000, das wurde erst Monate nach Kriegsende zugegeben  
Funktioniert auch umgekehrt, z. B.: zum **Erreichen der Zustimmung** zu kleinen Delikten.  
U. a. Polizeibehörden und argwöhnische, eifersüchtige Ehepartner.  
Dem „Gegenüber“ werden schlimmste Vergehen vorgeworfen.  
Unter der Flut der Anschuldigungen, der Last angeblicher „Beweise“ gibt das Opfer irgendwann etwas zu.  
Natürlich unter der Beteuerung, dass alles andere aber ganz bestimmt nicht wahr sei  
Aber genau dies Wenige sollte es gestehen!

# Othello-Effekt

Nach SHAKESPEARE-Drama = Beeinflussbarkeit über Szenarien  
Hinreichend lange Geschichte erzählen, die sich irgendwie logisch herzuleiten scheint.  
Dabei werden immer wahrscheinlichere Schlussfolgerungen gezogen.  
Auch wenn der Anfang ganz unwahrscheinlich ist, scheint das Ende bündig zu sein.  
**Widerspruch** zu: **Gesamt-Wahrscheinlichkeit** = Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten

# Falsche Schätzungen

Einige **Ursachen** sind, u.a. [Piattelli-Palmarini]:

- ***Selbstüberschätzung*** u. a. von Experten bei komplizierten Fragen.
- ***Magische Denken*** bei Vermutung einer Korrelation → Suche nach neuen Begründungen.
- ***Nachträgliche Besserwissen***: Beweisen, warum *Napoleon* hätte wissen müssen, dass er die Schlacht bei Waterloo verliert. Nach diesem Motto erfolgen sogar Entlassungen, und die Betroffenen fühlen sich auch noch schuldig!
- ***Eingängigkeit von Ereignissen***: Ein Tod durch Masern wird viel wahrscheinlicher als der durch Feuerwerkskörper gehalten.
- ***Blindheit für Wahrscheinlichkeiten***: kleine Wahrscheinlichkeiten, etwa 8 und 1 % erscheinen etwa gleich groß, ähnlich großen, wie 99% und 99,9%. Ganz extrem bei einem Risiko: entweder als vorhanden oder nicht.

# Ursachen und Wahrscheinlichkeiten

Wahrscheinlichkeiten sind immer *symmetrisch*, in beide Richtungen gleichwahrscheinlich

Andernfalls würden vielleicht Störche wirklich die Kinder bringen, denn

- In Deutschland nehmen über die Jahre Kinder und Störche gleichmäßig und hoch korreliert ab.
- In ländlichen Gebieten gibt es mehr Störche und mehr Geburten.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

- die Tochter blaue Augen hat, wenn die Augen der Mutter blau sind?
- die Mutter blaue Augen hat, wenn die Augen der Tochter blau sind?

Meist wird fälschlich der 1. Fall als wahrscheinlicher bewertet, aber beide 50 %

Unsicherheit bei Wahrscheinlichkeiten:

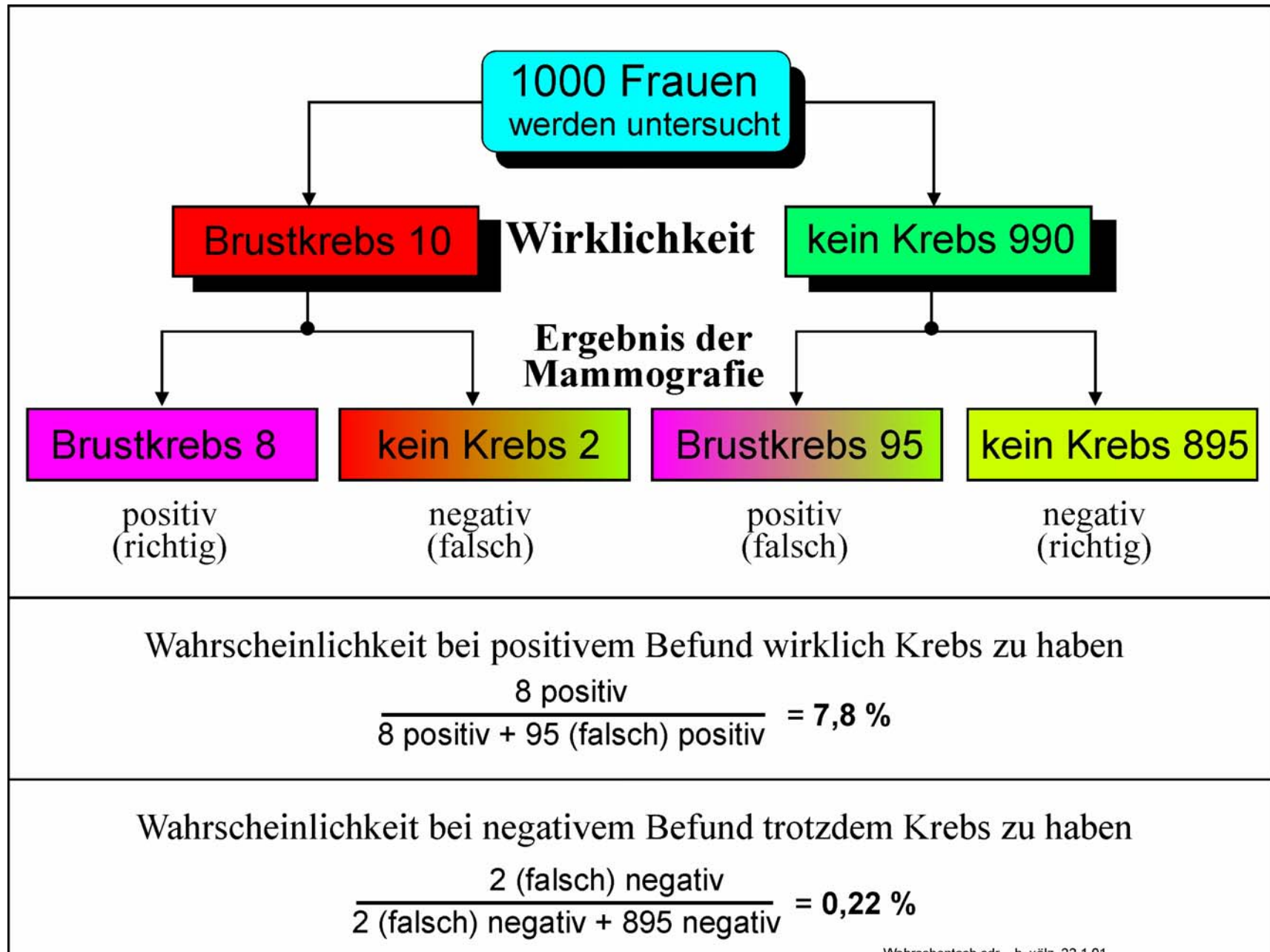
Stimmt die Diagnose Brustkrebs? Daten von 2001. Es gibt immer unvermeidliche Fehler bei Mammografie

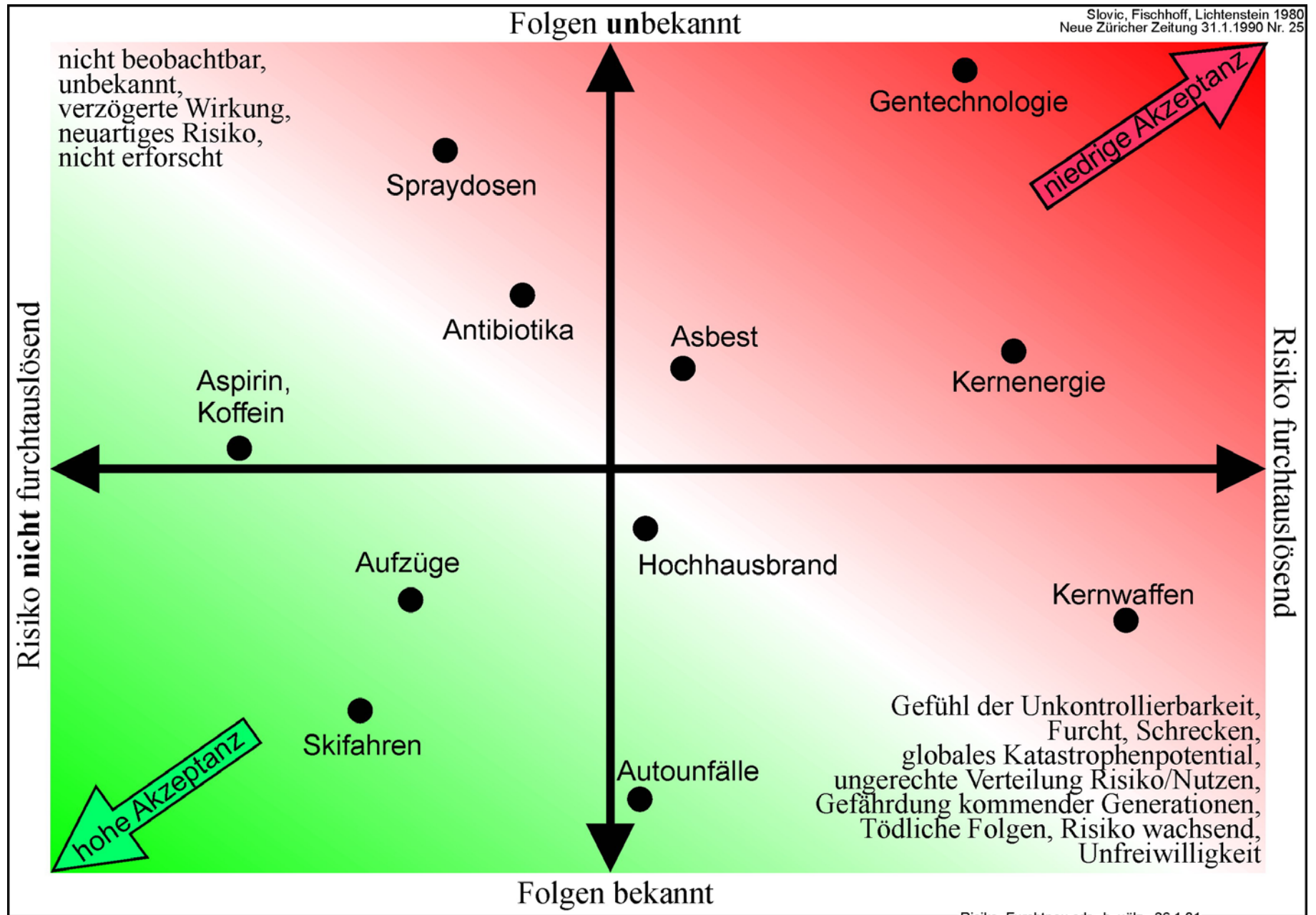
Von 1000 Patientinnen haben im Mittel 10 Krebs. Nur bei 8 von ihnen fällt die Diagnose positiv aus

Andererseits erhalten auch 95 gesunde Frauen einen positiven Befund

103 Frauen erhalten ein beunruhigendes Ergebnis, aber nur 8 davon sind wirklich krank

Deshalb sind Betrachtungen zum *Risiko* wichtig (übernächstes Bild)





# Simulation von Wahrscheinlichkeiten

Für die Anwendung des Zufalls in der Ästhetik sind Simulationen des Zufalls erforderlich. Es müssen gut definiert Zufallswerte erzeugt werden. Dafür gibt es folgende Methoden.

Physikalische Geräte	Würfel, Münzen, Karten, Lose, Urnen, Lose ziehen, Roulette, (Knobeln)
Physikalische Effekte	thermisches Rauschen von Widerständen, Dioden usw. Quanteneffekte haben noch wenig Bedeutung
Zufallstabellen	Heute keine Bedeutung mehr, meist durch mathematische Gesetze ersetzt
Algorithmisch, Mathematische Gesetze	Es gibt Zufallsgeneratoren in vielfältiger Art Ermöglichen aber nur Pseudo-Zufall, (s. u.)

# Erzeugung von Zufallszahlen

Zu *echten* Erzeugung existieren hauptsächlich zwei Varianten

1. Pegel des thermodynamischen oder Schrot-**Rauschens**
2. Rechnerinterne Uhr: Entnahme des Wertes der  $\frac{1}{100}$  **Sekunden**
3. Adresse vom ***Refresh-Register***
4. Wichtig sind **deterministische Algorithmen**

Die algorithmische Zufallsgeneratoren sind in den meisten Programmiersprachen implementiert (RND( $x$ )).

Die Variable  $x$  heißt Seed (engl.: Samen, Saat, Keim). Sie modifiziert die Eigenschaften der Funktion.

Der älteste bekannte Zufallsgenerator geht auf J. V. NEUMANN (1903 - 1957) zurück: Zweischnitt-Algorithmus

Es werden nur Zahlen des offenen Intervalls  $\{0, 1\}$  benutzt.

1. Quadrieren und 2. Auswählen der mittelständigen Ziffern, also z.B.

Seed = neuer Startwert	Quadrat	Zufallszahl
0,9876	0,97 <b>5353</b> 76	0,5353
0,5353	0,28 <b>6546</b> 09	0,6546
0,6546	0,42 <b>8501</b> 16	0,8501
0,8501	usw.	

Diese Methode hat sich nicht bewährt, da zuviel kleine Werte entstehen.

So wurden im Laufe der Jahre immer neue Zufallsgeneratoren entwickelt.

# Typische Eigenschaften

- Nach einer gewissen Anzahl von Schritten tritt eine schon vorher vorhandene Zahl wieder auf. Der Abstand ist die Periodenlänge und entspricht der Anzahl der überhaupt verfügbaren Zufallszahlen. Er hängt von der genutzten **Stellenzahl** und dem spezifischen Algorithmus, manchmal aber auch noch vom gewählten Seed ab. Heute liegt die Periodenlänge zwischen einigen Zehntausend und Millionen Schritten (Zahlen).
- Die erzeugten Zahlen besitzen innerhalb des meist gewählten **Intervalls**  $\{0, 1\}$  eine bestimmte Verteilung. Im Idealfall sollte eine **Gleichverteilung** (Mittelwert von 0,5) mit einer Streuung von 0,288675 vorhanden sein. Die Abweichungen hiervon sind das zweite Gütekriterium
- Innerhalb der Periode dürfen sich die Zahlen **nicht wiederholen**
- Für **besondere Verteilungen** – z.B. normalverteilt – erfolgen nachträglich **Transformationen**

Diese Methode der Zufallsgeneratoren hat für die Rechentechnik auch **Vorteile**.

Durch die Wahl des Seed ist eine genaue Wiederholbarkeit von Rechengvorgängen mit Zufall möglich. Mit zusätzlichen Maßnahmen ist sogar ein „echter Zufall“ erreichbar.

**Vorteile:** Zuverlässigkeit, Wiederholbarkeit, Ergänzung durch echten Zufall.

Für Start der Zahlentreihe wird das **seed** benutzt, z. B. bei **RND(X)**:

- $X < 0$        $X$  ist seed bestimmt Startwert der Zufallsfolge
- $X = 0$       letzter Zufallswert wird wiederholt
- $X > 0$       Zufallsfolge wird fortgesetzt ( $X$  hat keine Bedeutung)

Der Befehle **Randomize** holt den ms-Wert der internen Uhr, oder eine Refresh-Adresse



In diesem Beispiel beträgt die Zyklusfolge  $N = 20$

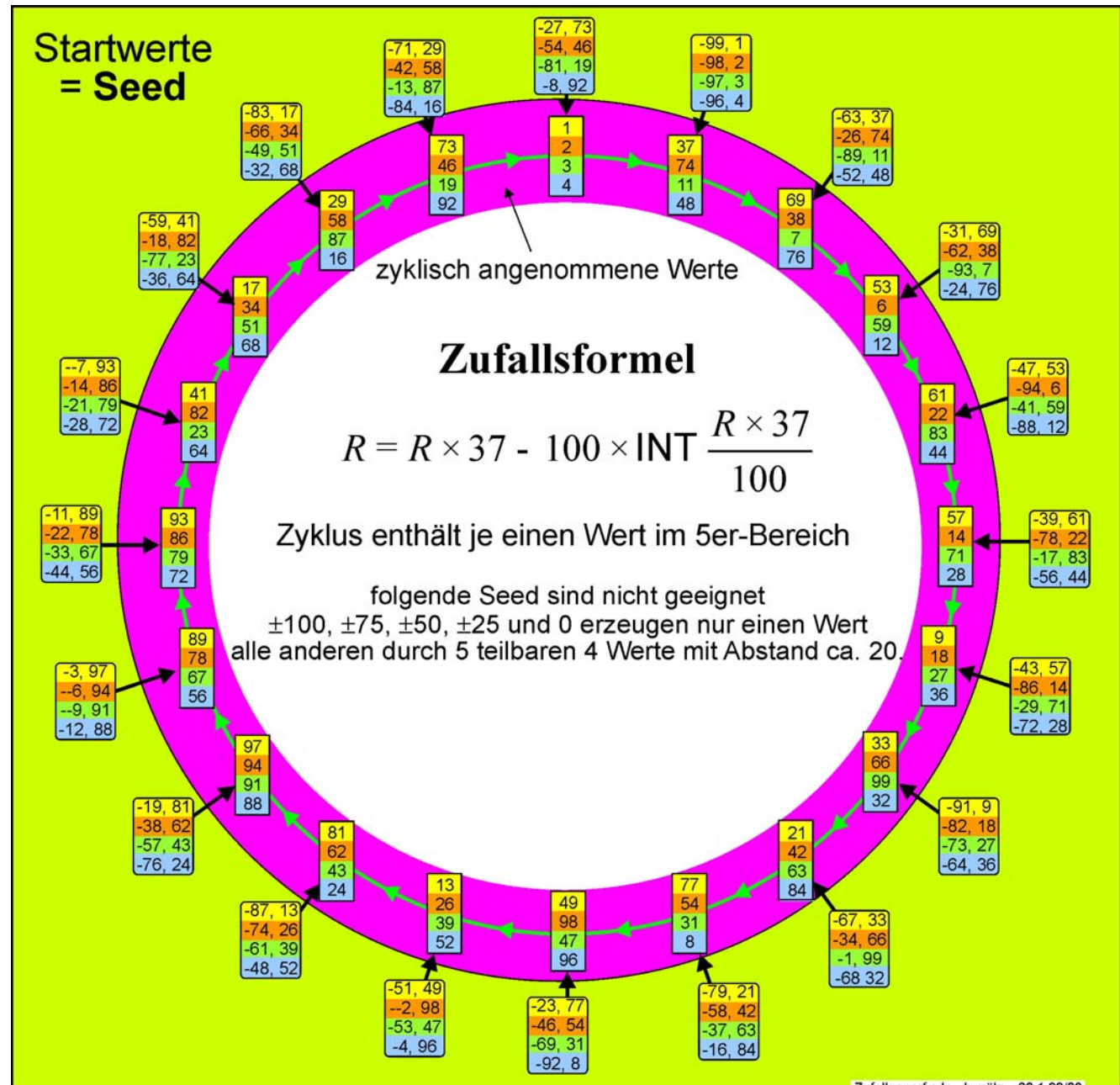
Es gibt 4 möglichen Zyklen, die durch die Startzahl (seed) bestimmt sind.

**Typisch für Taschenrechner:**

$x := \text{FRAC}(997 \cdot x)$ ,  $s = 0,5284163$ ;  
Periodendauer bei 10-stelligen Zahlen 500 000:

$$x := \frac{4835715066 \cdot x + 99991}{199017} \quad (\text{TI})$$

oder  $x := \text{FRAC}[(x + \pi)^5]$



# Rechnen mit zufälligen Werten

Für Anwendungen muss mit vorhandenen Zufallswerten gerechnet werden.

Die entsprechenden Methoden entstanden erst recht spät.

Im *Altertum* gab es lediglich bei den Sumerern Anfänge, betrafen wiederkehrende Zyklen, wie Mondfinsternisse.

PLATON (427 bis 347 v.Chr.) behandelt in seinen Dialogen so etwas wie eine *subjektive* Wahrscheinlichkeit.

Ab 17. Jh. begann die Mathematik für Renten, Versicherung gegen Risiko, Spielbanken-Gewinne usw.

Im Folgenden werden *nur die Mathematik* aber *nicht die Quanten-Physik* und *Informationstheorie* betrachtet

Wichtige Kennwerte des Zufalls sind die *Verteilungen*.

Sie weisen aus mit welchen Wahrscheinlichkeiten die Zufallswerte auftreten.

Besonders einfach ist die Gleichverteilung, wie beim Würfeln.

Ferner sind zu unterscheiden:

- *diskrete* Verteilungen. wie bei der Urne oder beim Los.
- *kontinuierliche* Verteilungen, bei Messungen (z. B. Gauß) oder Rauschen.

Weitere Beispiele sind:

- Null-Eins-Verteilung;  $n = 1$  Binomial-Verteilung; z. B. Münzwurf
- Negative Binomial-Verteilung
- Geometrische Verteilung
- **Maxwell**: Thermodynamische Geschwindigkeiten
- **Bose-Einstein** für entartete Flüssigkeiten, nur ganzzahliger Spin
- **Fermi** mit Pauli-Verbot, also keine zwei gleichen Elementarteilchen; auch halbzahliger Spin

# Verteilung von Zufallszahlen

Zuweilen werden neben Gleichverteilung auch andere benötigt, dann erfolgt vorher Umrechnung

**Ausgang:** Zufallszahlen  $u \in [0, 1)$ , **Ziel** Zufallszahlen gemäß Funktion  $F(x) \Rightarrow$  Transformation  $x = F^{-1}(u)$

**Exponential-Verteilung:** Mittelwert  $\mu$ ;  $z_e = -\mu \cdot \ln(x)$

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda \cdot x}; \quad x \geq 0 \Rightarrow 1 - e^{-\lambda \cdot x} = u \Rightarrow e^{-\lambda \cdot x} = 1 - u$$
$$x = -\frac{1}{\lambda} \cdot \ln(1 - u) \quad \text{bzw.} \quad x = -\frac{1}{\lambda} \cdot \ln(u)$$

**Normalverteilung:** Standardabweichung  $\sigma$ , Mittelwert  $m$

Gleichverteilung nach  $[a, b)$  durch  $y = (b - a) \cdot x + a$

$$v_1 = 2 \cdot x_i - 1 \quad \text{und} \quad v_2 = 2 \cdot x_{i+1} - 1 \quad \text{und} \quad t = v_1^2 + v_2^2$$

Falls  $t \geq 1$  Werte verwerfen und nächsten zwei  $x_i$  nehmen:

$$x_i = \sigma \cdot v_1 \cdot \sqrt{\frac{-2 \ln(s)}{t}} + m \quad \text{und} \quad x_{i+1} = \sigma \cdot v_2 \cdot \sqrt{\frac{-2 \ln(s)}{t}} + m$$

# Kommentare zur Statistik

Von SIR WINSTON LEONARD SPENCER CHURCHILL (1874 – 1965) stammen:

- Die Statistik ähnelt einem Bikini: Sie zeigt fast alles, verhüllt das Wesentliche
- Ich glaube nur eine Statistik, die selbst gefälscht habe

Der britische Premier DISRAELI soll gesagt haben: „Es gibt Lügen, dreiste Lügen und Statistik“

Angenommen, 40 % aller Autounfälle gehen auf Alkohol zurück. Dann verursachen nüchterne Autofahrer 60 % aller Unfälle

# Varianten der Statistik

**Deskriptive Statistik** = auch *beschreibende* = empirische. Es werden *vorliegende Daten* benutzt

Sie werden beschrieben, zusammengefasst, gegliedert, daraus folgen Kennzahlen

Die Ergebnisse werden graphisch bzw. in Tabellen dargestellt

Fast immer wird auf wissenschaftliche Aussagen verzichtet.

**Sondergebiete:** *Fehler-Rechnung*, *Regression* (Interpolation) und *Approximation*

**Induktive Statistik** = mathematische = *schließende* = folgernde = analytische = Inferenzstatistik

Daten werden aus einer *Stichprobe* (Erhebung) für die Eigenschaften einer *Grundgesamtheit* abgeleitet.

Es gibt strenge Kriterien für die Auswahl der Stichproben = *repräsentativ* für die Gesamtheit.

Für die Auswertung existieren *Schätz-* und *Testverfahren*.

Die Ergebnisse ermöglichen meist *verallgemeinernde Aussagen*.

*Erhebung* ermittelt Zustände der Welt  $\Leftrightarrow$  *Versuch* erforscht Ursachen, Gesetze usw.

**Explorative Statistik** = *hypothesen-generierende* = Datenschürfung = data mining

Methodisch eine Zwischenform von deskriptiver und induktiver Statistik.

*Systematische Suche* nach Zusammenhängen/Unterschieden zwischen Daten in Datenbeständen

Ergebnisse ermöglichen *Hypothesen* für induktive Testverfahren

Mit entsprechenden Versuchsplanungen können sie *statistisch bestätigt oder abgelehnt* werden

# Forderungen an die Statistik-Aussagen

<b>Objektivität</b>	unabhängig vom Standpunkt (Wünschen) des Erstellers und Auftraggebers (von Zeit und Ort)
<b>Reliabilität</b>	Verlässlichkeit, Genauigkeit (bei geringem zeitlichem Abstand etwa gleiches Ergebnis)
<b>Validität</b>	Überkontextuell gültig (in Bezug auf Hypothese)
<b>Signifikanz</b>	Bedeutend, aussagekräftig, wesentliche Aussagen
<b>Relevanz</b>	Wichtig, dem Anliegen angemessen

# Heutiges Hauptgebiet

**Stochastik** (grie. *stochos*, Vermutung; *stochastike (téchne)* zum Erraten gehörend(e Kunst)  $\approx$  Kunst des Mutmaßens)

Betrifft allgemein: **vom Zufall abhängige Ereignisse und Prozesse**, wie:

Zufallsexperimente, Rentenzahlung, Lotteriegewinne, Meinungsumfragen, Messfehler usw.

Befasst sich auch mit *Kombinatorik*, *Wahrscheinlichkeitstheorie* und *mathematischen Statistik*

Es muss wenigstens eine Größe zufällig sein, z. B. Teilchen der Molekularbewegung

$\Rightarrow$  Gesetze über viele Teilchen, z. B.  $p \cdot V = \text{const.}$  ( $p$  = Druck,  $V$  = Volumen)

## Zwei Teilgebiete von Stochastik

**Probabilistik** (lat. *probare* erproben, prüfen, untersuchen)

Es müssen die zugrunde liegenden Verteilungen bzw. Wahrscheinlichkeiten bekannt sein

z. B. Würfel, Urne, Los oder Gauß- oder Maxwell-Verteilung bzw. radioaktiver Zerfall usw.

**Statistik** (lat. *statisticum* den Staat betreffend); besonders **umfangreich**

1749 in Deutschland durch GOTTFRIED ACHENWALL (1719 – 1722) eingeführt

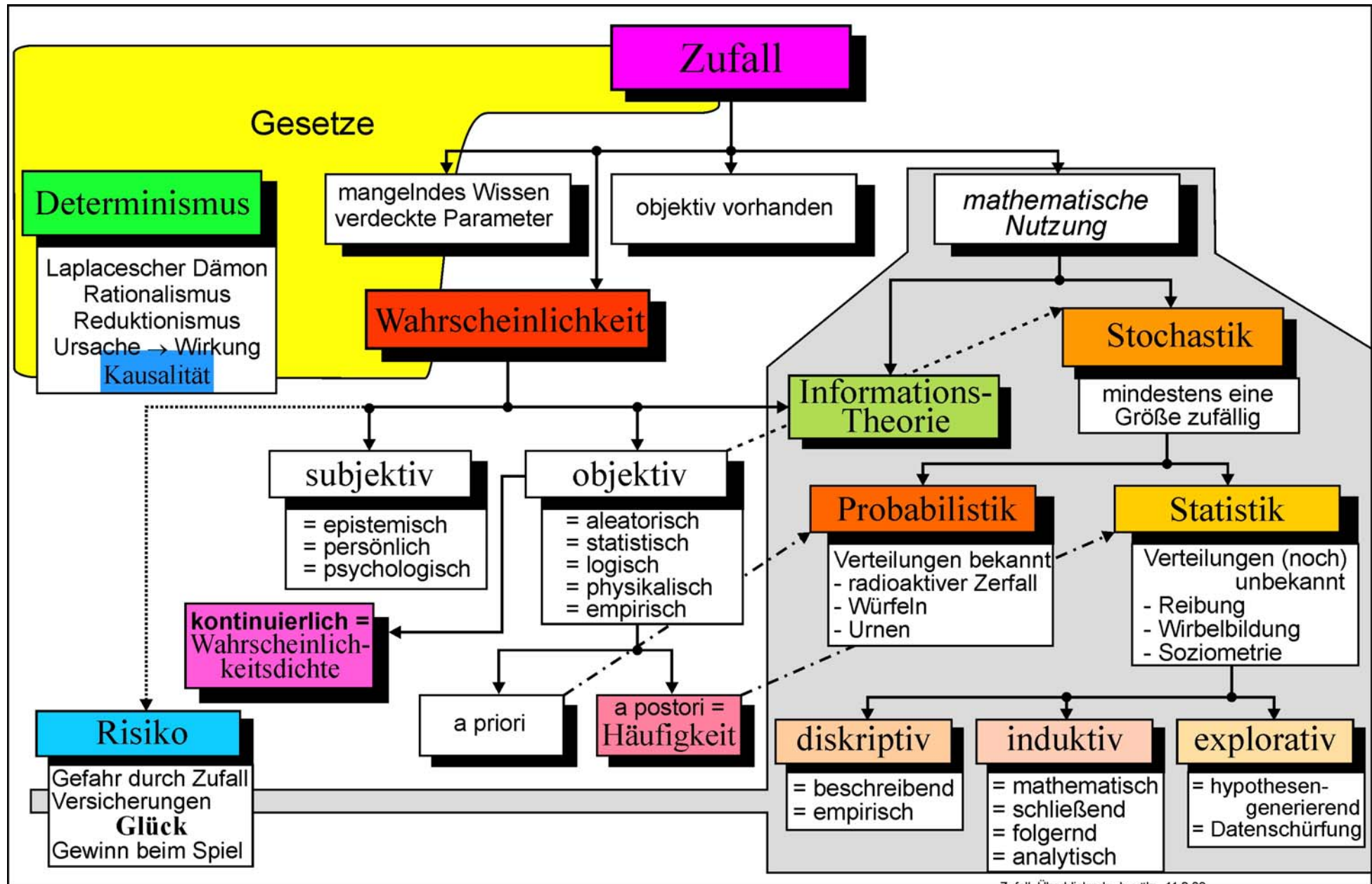
Jedoch erst im 19. Jh. von SIR JOHN SINCLAIR in heutiger Bedeutung benutzt

nämlich für das Sammeln und Auswerten von Daten

Verteilungen sind nicht bekannt, z. B. Reibung, Wirbelbildung, Soziologie usw.

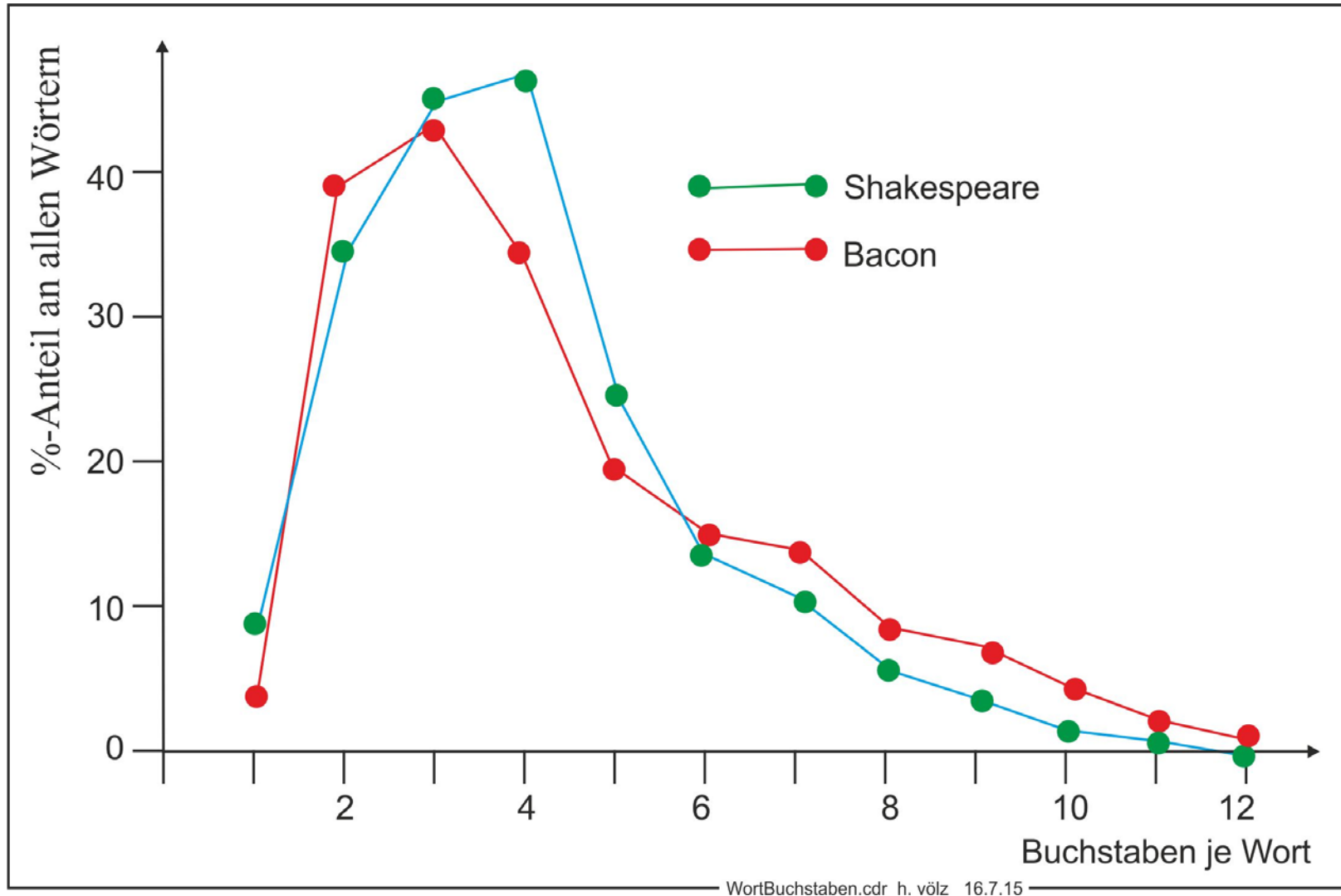
Neue Entwicklungen betreffen Big Data.

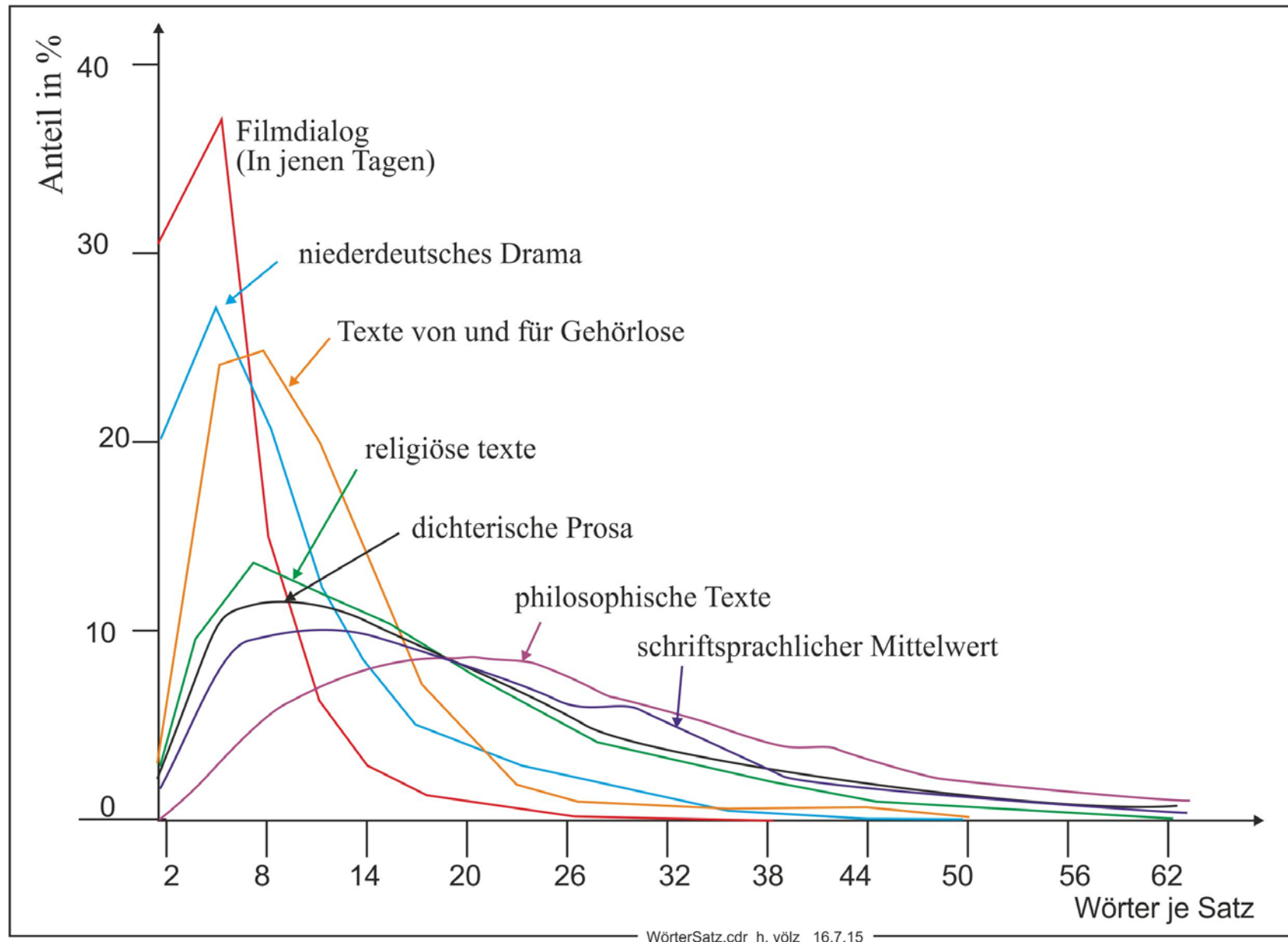
Einen **Gesamtüberblick** zeigt das folgende Bild





# Beispiel einfacher Statistik





# Gauß- =Normal-Verteilung

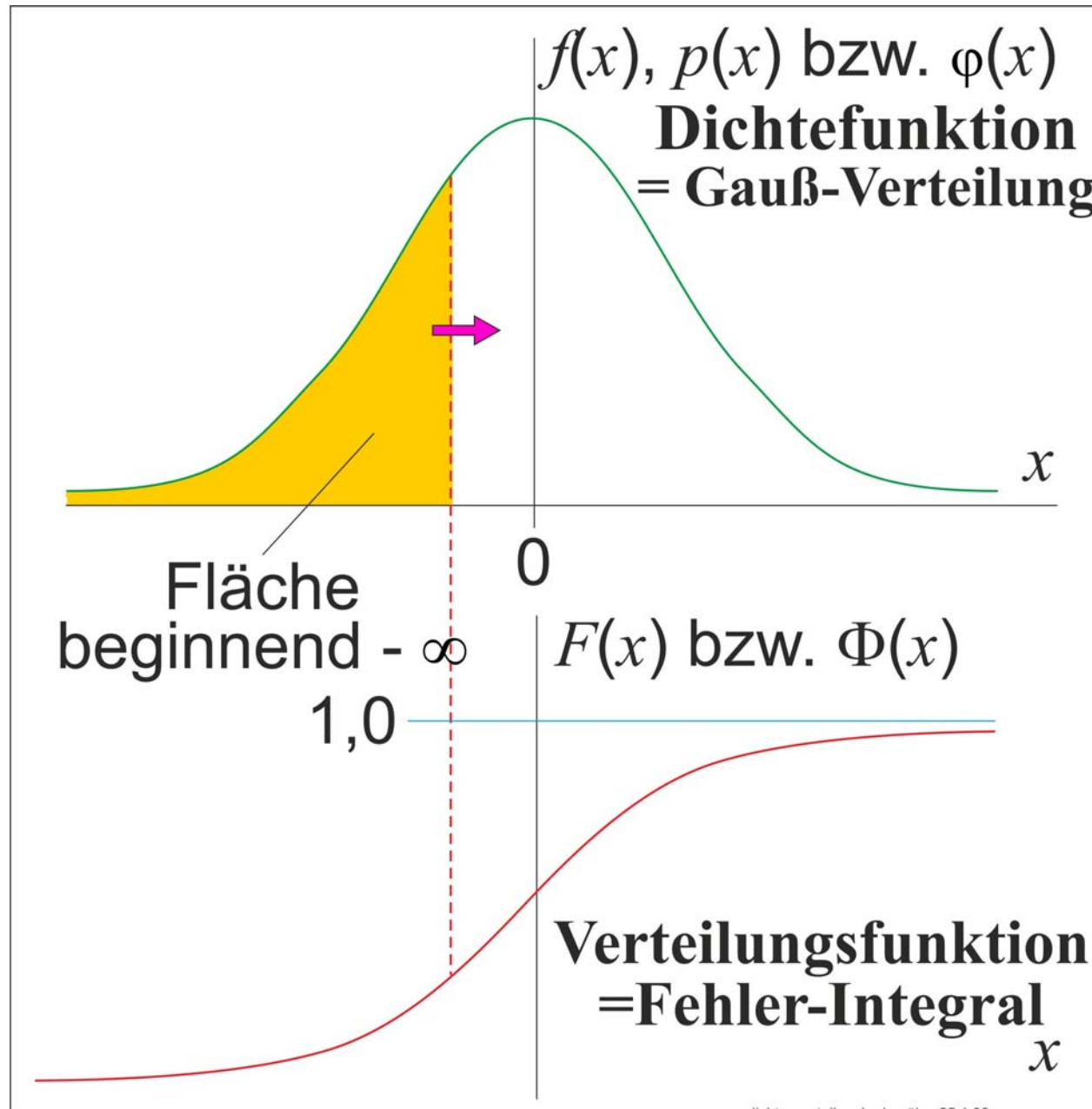
Sie ist besonders wichtig und tritt immer dann ein, wenn *viele unabhängige Zufallsprozesse* vorhanden sind. Aus ihrer *Normalverteilung* mit dem Erwartungswertes  $\mu$  und der Varianz (Streuung)  $\sigma^2$

$$f_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}}$$

Entsteht durch Integration entsteht die **Fehlerverteilung** = **Fehlerintegral**, ist wichtig für Fehler-Rechnung

$$F_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma^2}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}} dz$$

Die meisten weiteren Kenngrößen sind für beide Funktionen leicht bestimmbar. Sie existieren auf Rechnern als Programme und auch in Tabellen.



dichte\_verteilg.cdr h. vözl 25.1.99

# Wahrscheinlichkeits-, statistische Maße

Es gibt  $n$  Ereignisse als Zahlenwerte  $x_i \in \mathbf{A}$  mit den Wahrscheinlichkeiten  $P(x_i)$ .  
In jedem fall lassen sich dazu Kennwerte bestimmen.

## 1. Mittelwerte

**Erwartungswert (EX) = Median ( $m$ ) = Zentralwert = Mittelwert = gewogenes arithmetisches Mittel:**

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n P(x_i) \cdot x_i \quad \text{bei gleichwahrscheinlich:} \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i .$$

**Geometrisches u. harmonisches Mittel** meist nur gleichwahrscheinlich üblich

$$x^0 = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} \quad \text{bzw.} \quad x^{\approx} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}$$

**Quantil  $Q_p$**  der Ordnung  $p$ ;  $p=0,5 \rightarrow$  Median

$$P(x_i < Q_p) \leq p \quad \text{bzw.} \quad P(x_i > Q_p) \leq 1-p$$

**Modalwert (Modus)** ist der ***häufigste*** Wert.

## 2. Streumaße

**Variationsbreite** = Spannweite  $\delta = x_{max} - x_{min}$

**Durchschnittliche Abweichung** = zentrales Moment 1. Ordnung

$$d = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|$$

Die **Varianz** ( $D^2X$ ) = Streuung  $s$  = Dispersion

$$s = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \cdot P(x_i) \text{ für gleichwahrscheinlich } s = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

sie kann auch fortlaufend (gleichwahrscheinlich) bestimmt werden

$$s = \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot P(x_i) - \left( \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(x_i) \right)^2 \text{ oder } s = \frac{1}{n-1} \cdot \left[ \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \cdot \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right]$$

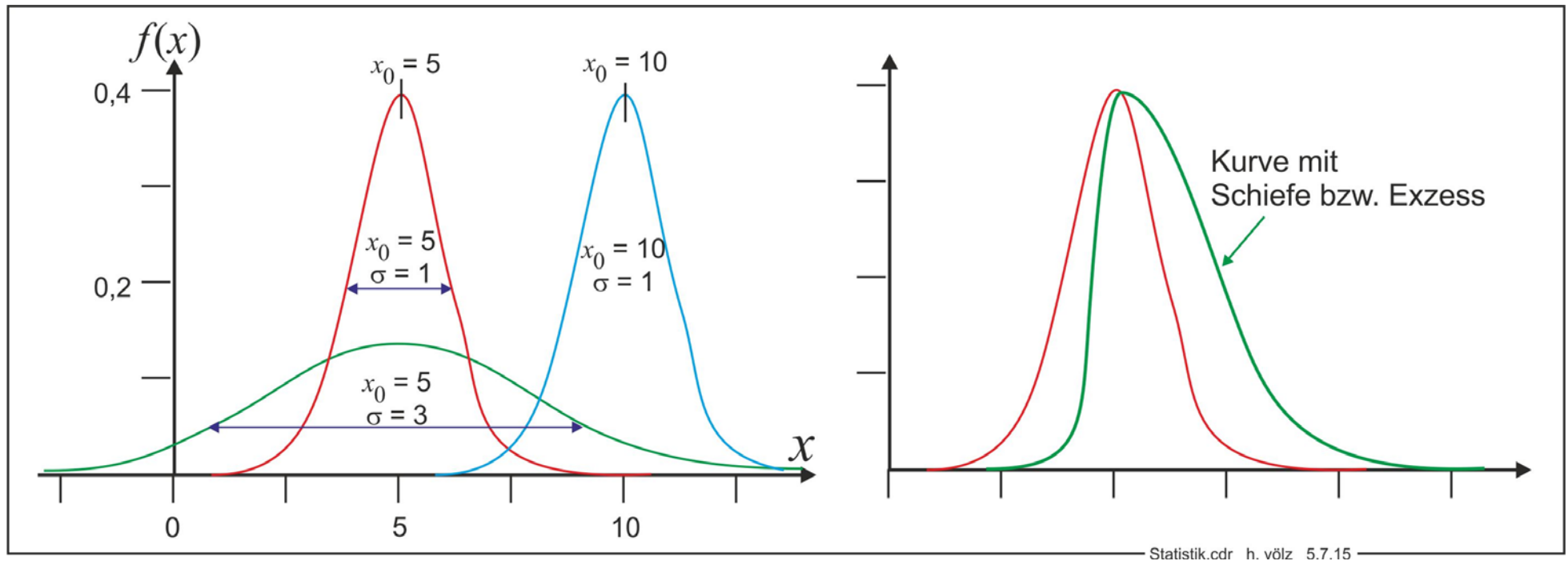
Daraus folgt die **Standardabweichung**  $\sigma = \sqrt{s}$  als Quadratwurzel aus der Varianz

### 3. Momente höherer Ordnung

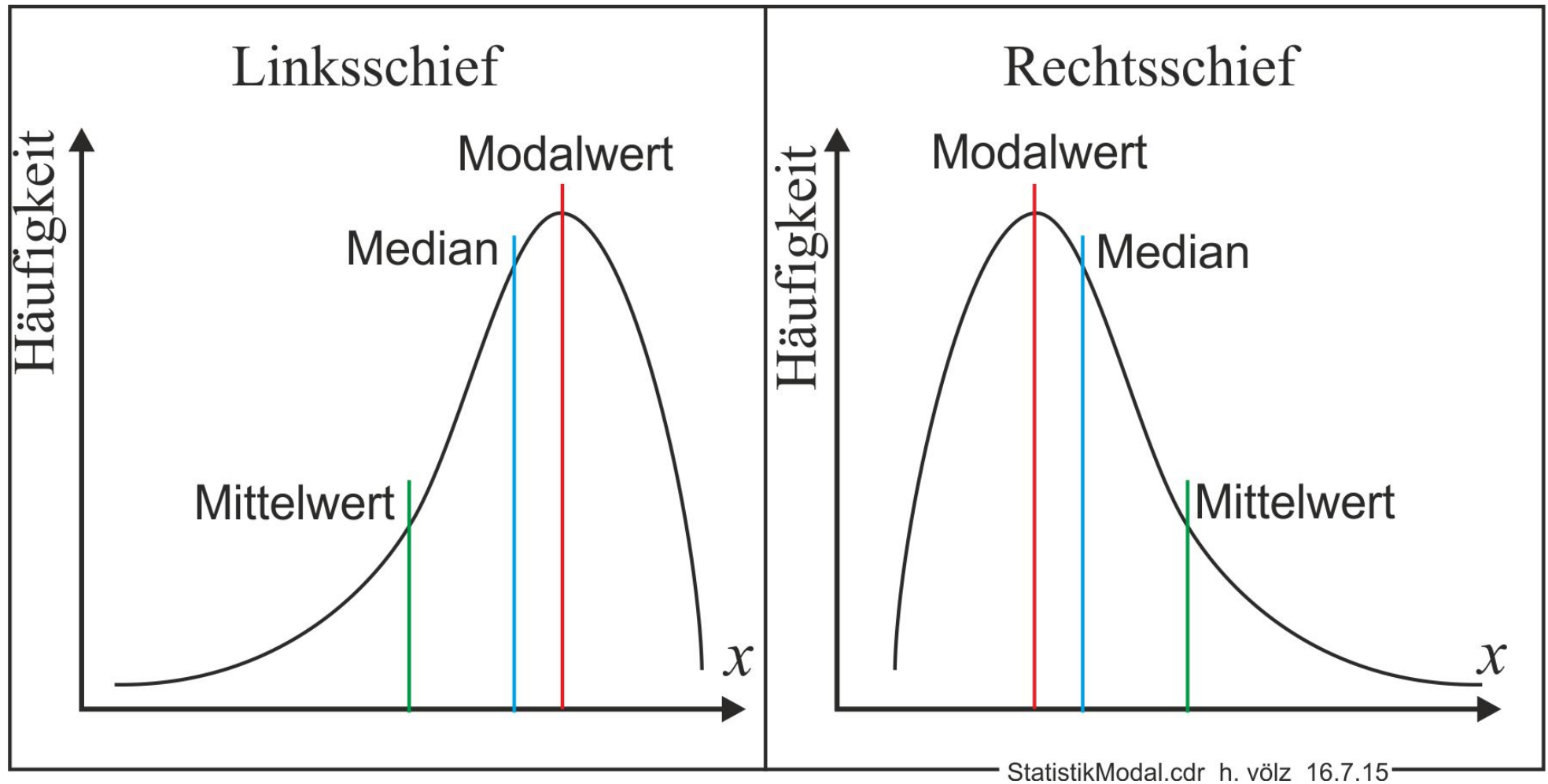
$$\mu_k = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^k \text{ für } k = 2, 3, 4, \dots$$

Speziell folgen daraus **Schiefe** bzw. **Exzess**

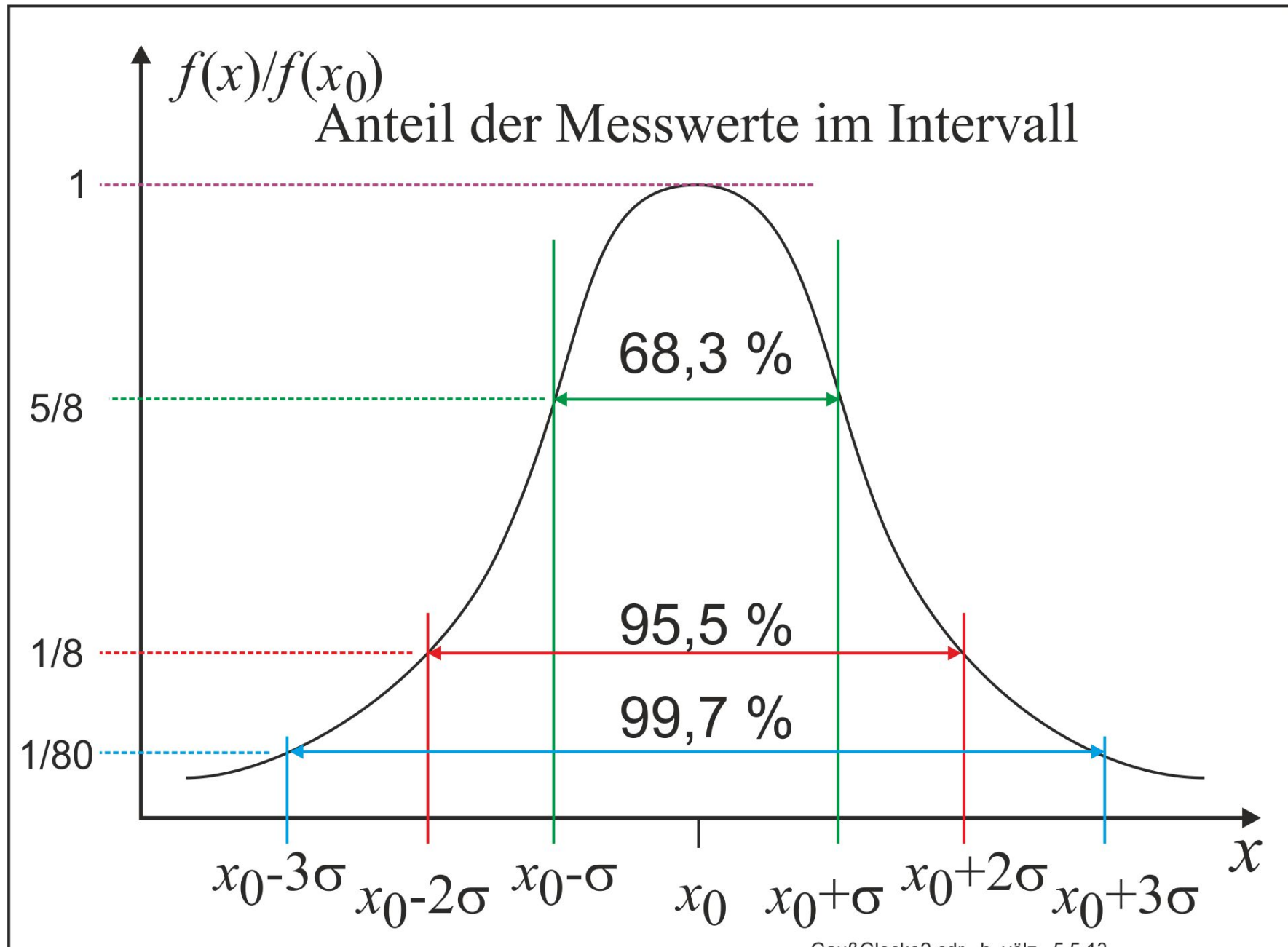
$$\gamma = \frac{\mu_3}{\sigma^3} \quad \text{bzw.} \quad \varepsilon = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$$



Bemerkenswert ist noch die Betrachtung der Werte, die von der Streuung abhängen







# Anwendung Musik

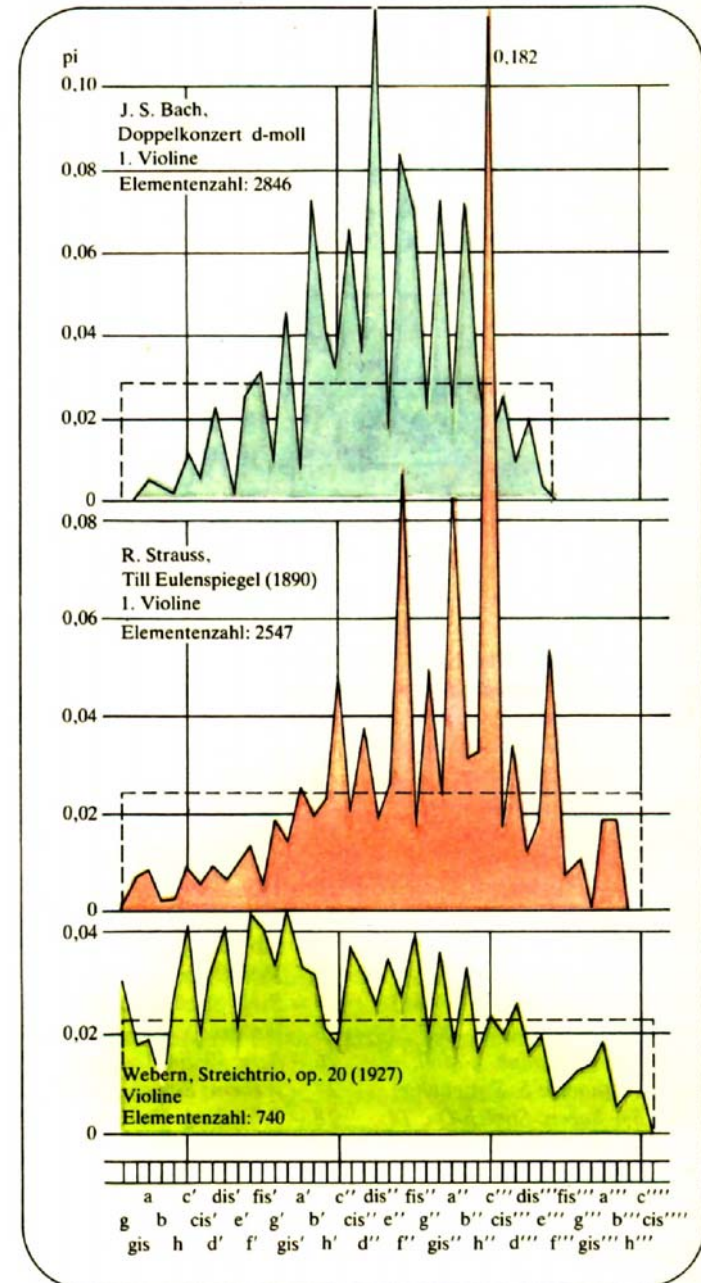
Für die Verteilungen der Noten ergeben sich u. a. die folgenden Bilder.

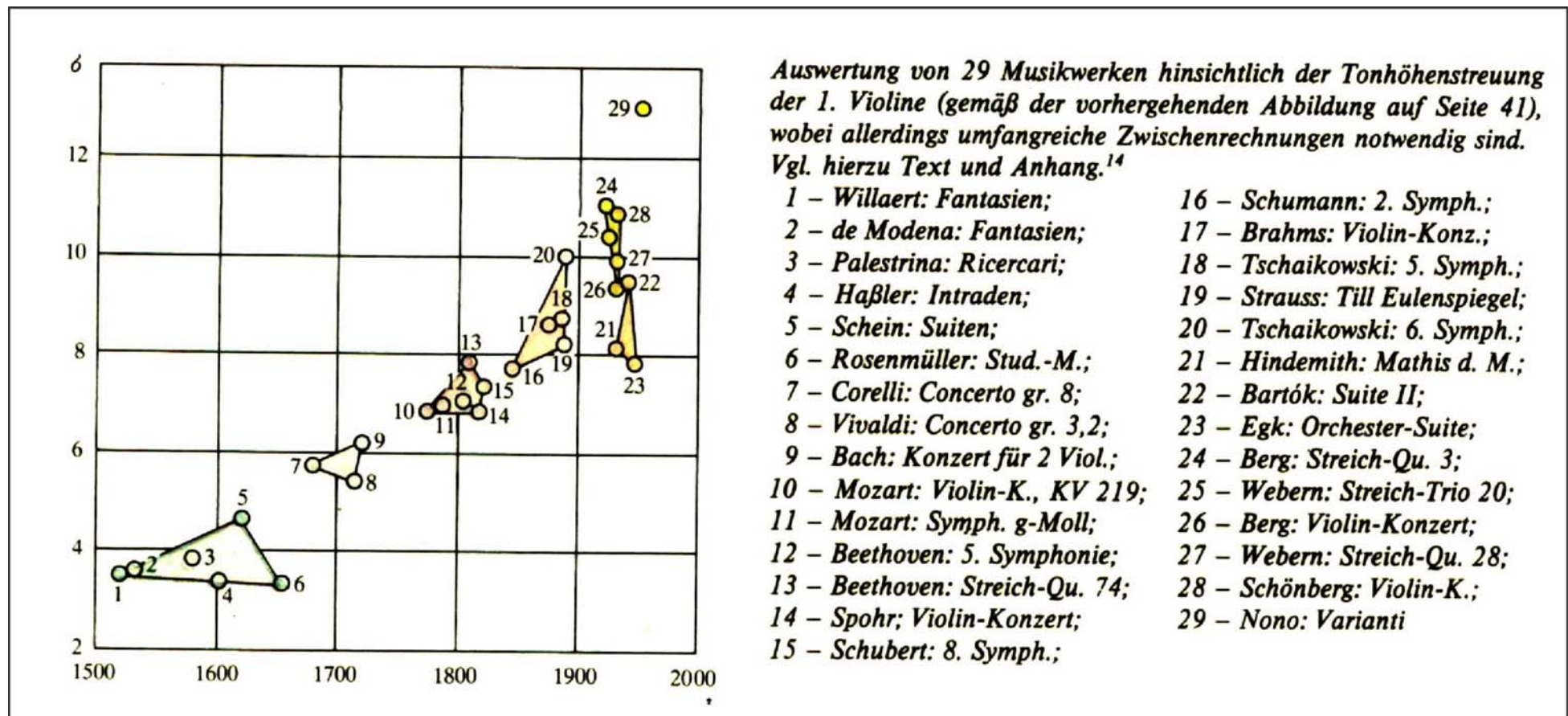
Unmittelbar ist zu erkennen, dass im Laufe der Geschichten sich der Mittelwert und die Streuung verändern.

Unter Anwendung der Mathematik ergeben sich jedoch detaillierte Aussagen.

Insbesondere ergibt der Exzess korrekte Zusammenhänge zum Zeitpunkt der Entstehung der Werke.

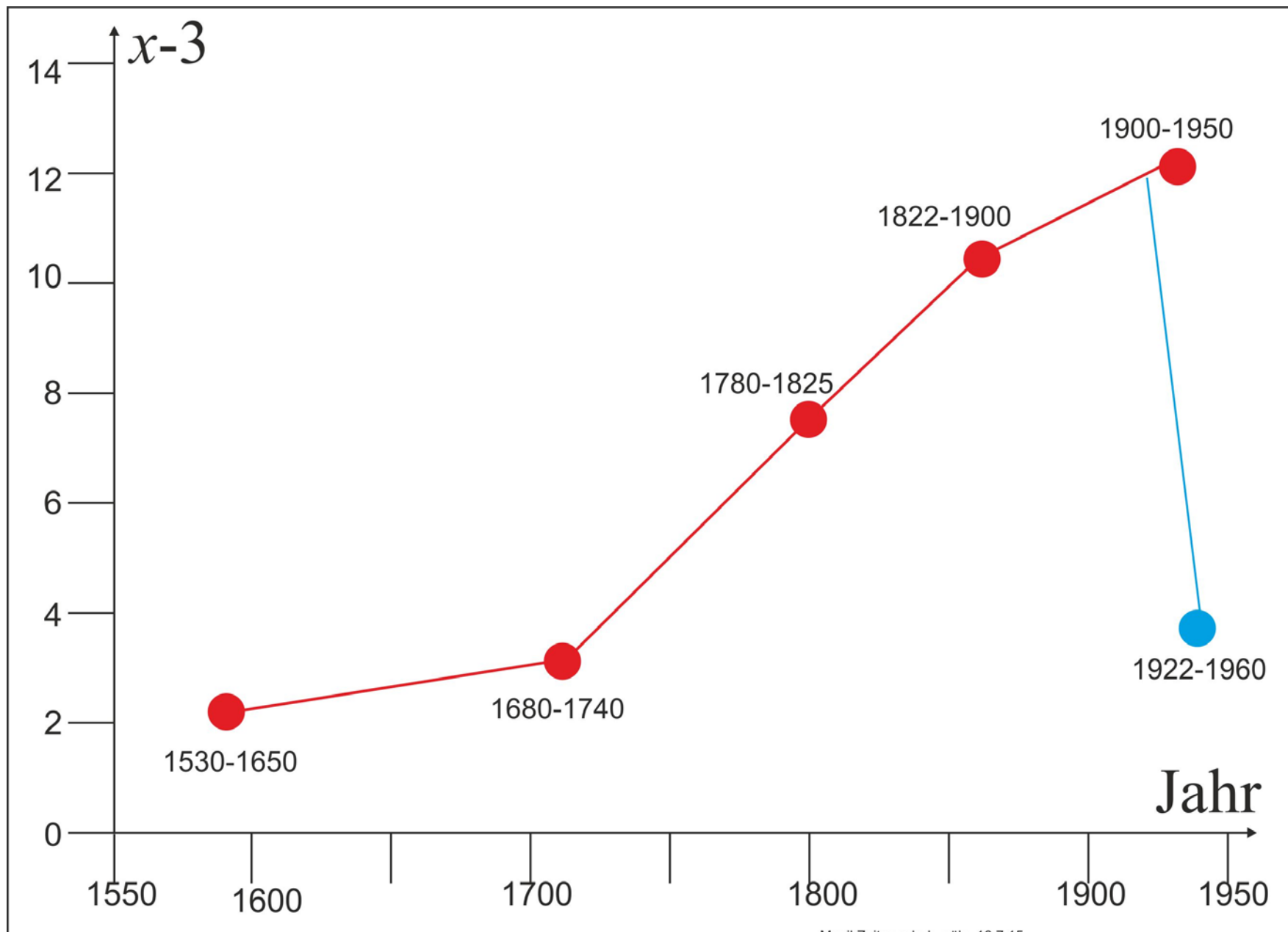
Die im folgenden Bild ausgewiesene Aufteilung zur 12-Ton-Musik geht jedoch bei späteren Analysen verloren. (Fucks)





Insbesondere ergibt der Exzess korrekte Zusammenhänge zum Zeitpunkt der Entstehung der Werke.

Die ausgewiesene Aufteilung zur 12-Ton-Musik geht jedoch bei späteren Analysen verloren. (Fucks)



MusikZeiten.cdr h. völg 16.7.15

# Statistik von Texten

Allgemein werden hierbei Datensätze nach ihrer Häufigkeit in Rangfolgen geordnet.

Das geschah ursprünglich bei Texten und lieferte interessante Ergebnisse.

Meist benutzt wird der **Limas-Korpus** aus Texten der deutschen Gegenwartssprache von 1970.

500 Textstellen mit je etwa 2000 Wortformen von Trivallliteratur, Zeitungstexten, Romanen, Fachaufsätzen usw.  
Gesamtumfang beträgt reichlich  $10^6$ , darunter 116 000 verschiedene Wortformen.

Ursprünglich ergab sich 1916 das *harmonisches Gesetz* aus Beobachtungen von **ESTOP**

$$p(r) \approx \frac{K}{r}$$

Dabei sind  $p$  die Wahrscheinlichkeit,  $r$  der Wort-Rang und  $K$  eine Konstante.

Durch Anpassung an Spracheigenschaften ergab sich die **Texttemperatur  $T$**  (Steilheit der Geraden)

$$p(r) = K \cdot r^{-1/T}$$

Es gilt etwa: Deutsch 0,46; 0,54; 0,66 oder 0,71; Russisch 0,88; Hebräisch 0,82; Englisch 0,72; 0,77 bzw. 0,90

# Zipf-Mandelbrot

GEORGE KINGSLEY **ZIPF** (1902-1950) ergänzte die Formel mit Anzahl  $R$  der verschiedenen Wörter

$$p(r) \approx \frac{1}{r \cdot \ln(1,78 \cdot R)}$$

Für die SHANNON-Entropie ergibt sich daraus (s. u.)  $H = 0,5 \cdot \lg(2 \cdot R \cdot \ln(2 \cdot R))$

Bei 12 000 verschiedenen Wörtern folgt  $H \approx 9$  Bit/Wort; bei 300 000  $H \approx 11,5$  Bit/Wort.

BENOIT B. **MANDELBROT** (\*1924) führte die zusätzliche Konstante  $r_0$  zum **kanonischen Gesetz** ein

$$r_0 = \frac{L}{L-1}$$

$L$  berücksichtigt den maximalen Rang  $R$  und bewirkt eine Korrektur für die kleinen Ränge

$$p(r) = K \cdot (r + r_0)^{-1/T}$$

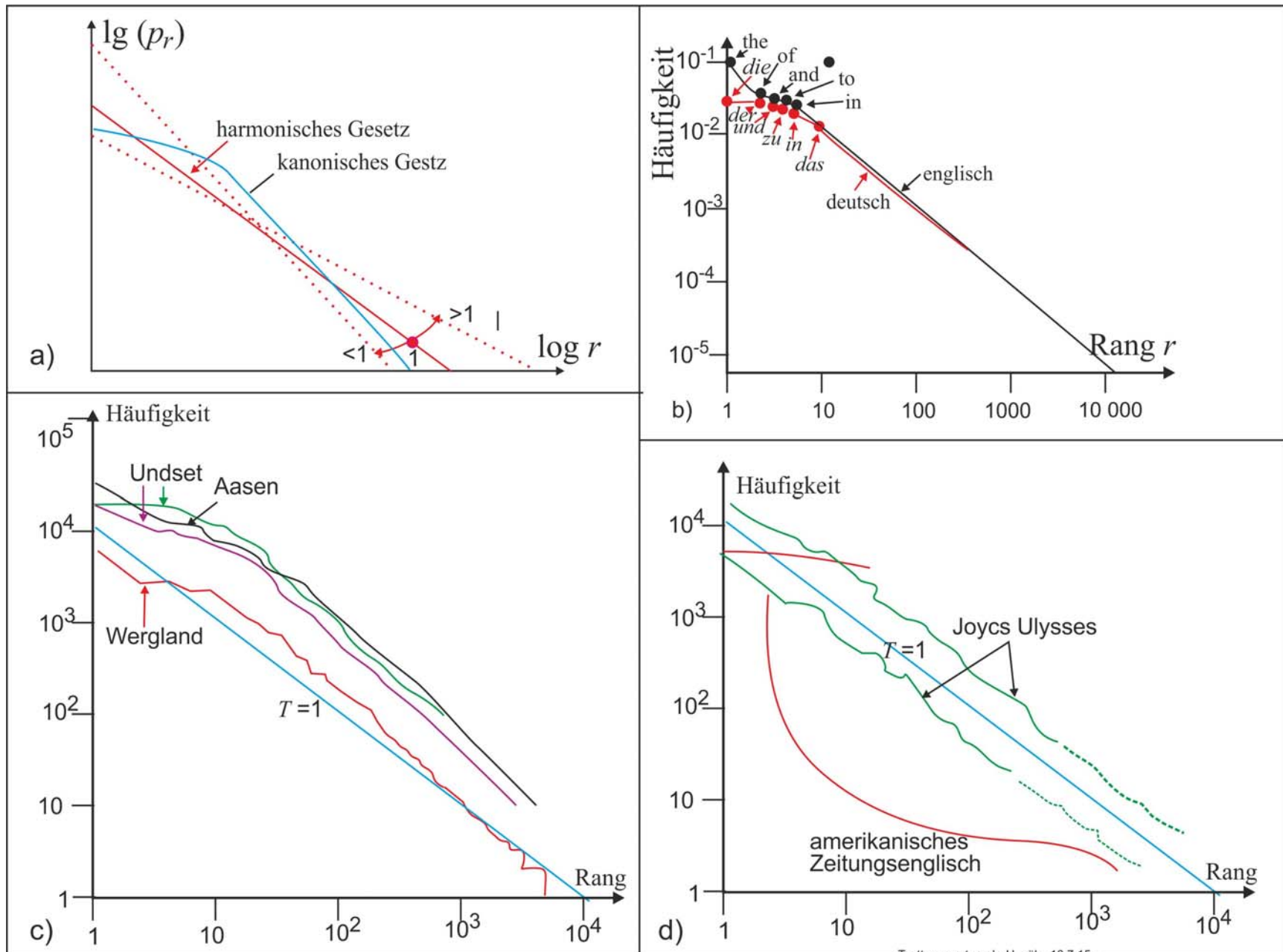
Für *viele Elemente eines Systems* gewinnt **VOSS** allgemein mit auffindbaren (ableitbaren) Konstanten  $Z$  und  $\gamma$

$$p(r) = \frac{1}{Z} \cdot \frac{e^{-\gamma r}}{r}$$

M. W. ist nicht geklärt, ob das überall in der Physik, Elektronik usw. gilt.

Zumindest könnte ein Zusammenhang zum **1/f-Rauschen** bestehen.





## Andere Beispiele

Bundeshaushalt 1968	in %	Berufe in der DDR 1967	in %
Verteidigung	22,3	Fachverkäufer	8,2; 9,12
Sozialministerium	20,7	Schlosser	7,5; 9,12
Finanzverwaltung	13,8	Maurer	5,3; 5,58
Verkehr	9,9	Elektromonteur	4,2; 3,99
Ernährung	6,7	Dreher	3,8; 3,11
Bundesschuld	4,1	Agrotechniker	2,5; 2,54
Versorgung	4,0	Stenotypistin	2,1; 2,14
Familien	3,5	Friseur	1,7; 1,85
Wirtschaftliche	2,5	Verkehrsarbeiter	1,6; 1,63
Zusammenarbeit	2,3	Krankenschwester	1,6; 1,45
Wissenschaft und	2,0	Rinderzüchter	1,5; 1,32
Forschung	1,3	Maschinenbauer	1,4; 1,2
Innenministerium	6,9	Maler	1,3; 1,1
Wirtschaft		Koch	1,3; 1,02
Sonstiges		Gärtner	1,0; 0,95
		Technische Zeichner	1,0; 0,89

Eine Analyse des 2. Satzes von Ludwig van **Beethovens** (1770 - 1827) Sonate A-Dur op. 3 mit 1630 Noten und 71 Tonhöhen ergab bei einem Korrelationskoeffizienten von 0.855  $K = 0.62$  und  $T = \mathbf{0.708}$



# Anwendung auf Ziffern

1881 fand Astronom Simon NEWCOMB:

Bei Logarithmentafeln verschmutzen die ersten Seiten, die mit 1 beginnen besonders schnell

Generell fand er, dass Zahlen, die 1 beginnen doppelt so häufig sind wie die mit 2 → NEWCOMB's Formel

1938 fand FRANK BENFORD erneut das Gesetz von NEWCOMB an Zahlen über Gebiete, Flusslängen usw.

1961 folgten weitere Untersuchungen von ROGER PINKHAM.

Für die erste Ziffer: 1  $\approx$  30 %; 2  $\approx$  18 % langsamer Abfall bis 9  $\approx$  4,6 %

Für die zweite Stelle: 0  $\approx$  12 % Abfall bis 9  $\approx$  8,5 %

Um 1995 wies THEODORE HILL nach, dass wesentlich *logarithmische Verteilungen* sind

Um 2007 konnte auf dieser Grundlage MARK NIGRINI *Fälschungen bei Patientendaten* nachweisen

U.a. 13 gefälschte Schecks zwischen 6.500 und 6.599 \$ für angebliche Herzoperationen

**Theoretisch** folgt für die erste Ziffer:  $n = 1$  bis 9  $\Rightarrow \log(n+1) - \log(n)$ . Beachte  $\log(1) = 0$  und  $\log(10) = 1$

Ziffer	1	2	3	4	5	6	7	8	9
%	30,1	17,6	12,5	9,7	7,9	6,7	5,8	5,1	4,6

Bei der zweiten Ziffer kann auch 0 Null auftreten

Es ergibt sich eine komplizierte Verteilung, welche über alle neun vorangehenden Ziffern zu mitteln ist

Für die Einhaltung des Gesetzes gibt es *zwei Bedingungen*

1. Es müssen mehrere Hundert Zahlen betrachtet werden
2. Es dürfen keine Einschränkungen auftreten, z. B. Körpergröße → beginnt immer mit 1

# Lotto-Zahlen

Besonders extrem erwiesen sich bei Untersuchungen von [Bosch] die *Lotto-Zahlen*  
Er hat  $6,8 \cdot 10^6$  Tippreihen eines Sonnabends von 6 aus 49 untersucht:

19 = 32 % und 36 = 26 % liegen erheblich über dem Durchschnitt

Es folgen: 9, 7, 17, 10, 11, 18, 25, 3, 32, 12

Am Ende stehen: 43, 35, 29, 44, 42, 47, 22, 15, 14, 49

# Regression – (Kurven-) Anpassung – Fit (-ting) - Smoothing

Sie ermöglicht es, mathematische Gesetze zu benutzen und auf „Sicherheit“ zu prüfen.

Zusätzlich sind *Extrapolation* (Prognosen, Rückrechnungen usw.) über den gemessenen Bereich hinaus möglich.

Es gibt **drei Haupt-Varianten**:

- **Linear**  $y = a + b \cdot x$
- **Nichtlinear**  $y = a + b \cdot x + c \cdot x^2 + d \cdot x^3 + e \cdot x^4 + \dots$  allgemein  $y = f(x)$
- **Mehrere Variablen**  $y = a + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 + \dots$  allgemein  $y = f(x_1, x_2, x_3, \dots)$

# Lineare Regression

Es müssen nur zwei Konstanten  $a$  und  $b$  verwendet und der Korrelationskoeffizient  $r$  ( $\rho^2$ ) bestimmt werden:

$$a = \frac{\sum y \cdot \sum x^2 - \sum x \cdot \sum x \cdot y}{n \cdot \sum x^2 - [\sum x]^2} = \frac{1}{n} \cdot (\sum y - b \cdot \sum x) \quad \text{und} \quad b = \frac{n \cdot \sum x \cdot y - \sum x \cdot \sum y}{n \cdot \sum x^2 - [\sum x]^2}$$

$$r = \frac{n \cdot \sum x \cdot y - \sum x \cdot \sum y}{\sqrt{(n \cdot \sum x^2 - [\sum x]^2) \cdot (n \cdot \sum y^2 - [\sum y]^2)}}$$

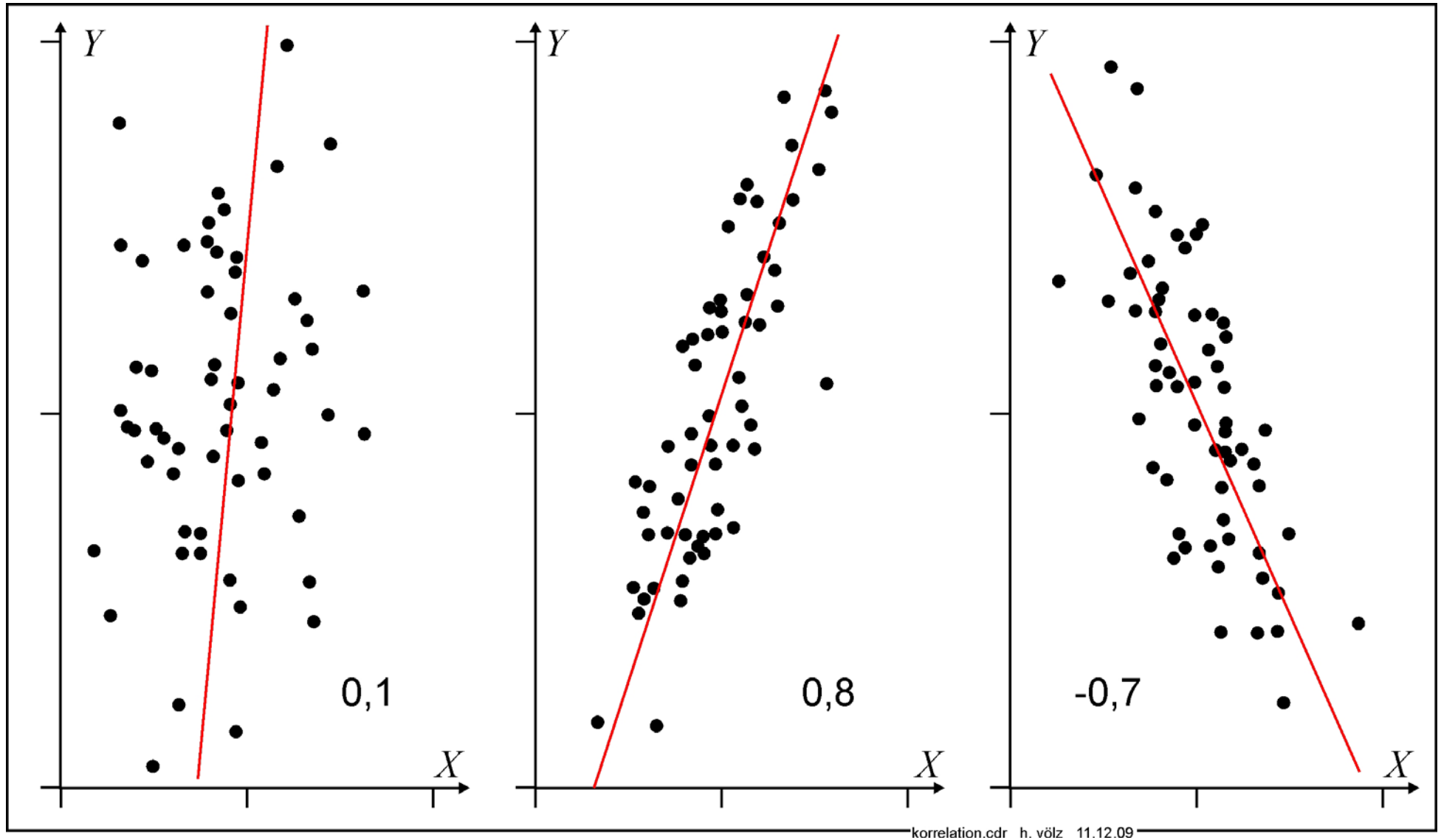
Hierfür sind die Summen für 5 Größen zu bilden:  $\sum x$ ;  $\sum y$ ,  $\sum x \cdot y$ ;  $\sum x^2$  und  $\sum y^2$ .

Für Messungen an Studenten ergaben sich bei [Stoyan] folgende Korrelationen

	Gewicht	Bauchumfang	Schuhgröße	Handgröße	Oberschenkelumfang
Größe	0,74	0,32	0,86	0,27	0,28
Gewicht		0,57	0,54	0,13	0,68
Bauchumfang			0,25	-0,14	0,50
Schuhgröße				0,13	0,23
Handgröße					0,44

Korrelationen müssen keinen **ursächlichen** Zusammenhang ausweisen

Beispiel (s. o.) **Störche**  $\Leftrightarrow$  **Kinder**, Achtung Medizin und Pharmazie



## Nichtlineare Regression

Hierzu müssen zuerst die „Messwerte“  $x$  bzw.  $y$  umgerechnet werden, dabei gilt:

logarithmisch	$y = a + b \cdot \ln(x)$		$x' = \ln(x)$
exponentiell	$y = a \cdot b^x$	$y' = \ln(y) = a' + b' \cdot x$	$a' = \ln(a); b' = \ln(b)$
geometrisch	$y = a \cdot x^b$	$y' = \ln(y) = a' + b' \cdot \ln(x)$	$a' = \ln(a)$
trigonometrisch	$y = a + b \cdot \sin(x)$		$x' = \sin(x)$
reziprok	$y = a + b/x$		$x' = 1/x$
<b>Texttemperatur</b>	$T p(R) \approx k \cdot R^{-T}$	$x = \log(R+1); y = \log(p(R+1))$	$T = -b$
	Beachten: $R$ beginnt bei 0		

# Information als Modell

Information wird heute *inflationär* benutzt. Es gibt kein Gebiet, in dem sie nicht irgendwie herangezogen wird.

Gemäß den bisherigen Betrachtungen und gemäß *Norbert Wiener* (s. o.) ist sie ein *Modell*.

Es ist für beachtliche viele *Weltbeschreibungen* geeignet.

Information ist besonders für *komplexen Zusammenhänge* geeignet,  
nämlich dort, wo die Modelle Stoff und Energie *umständlich*, kompliziert sind.

Dagegen ist, wo Stoff- und Energie-Beschreibungen effektiv sind, Information *weitgehend überflüssig*.

Daher bestehen für Informationen auch immer *Zusammenhänge, Wechselwirkungen* mit Stoff und Energie.

Das Gemeinsame ist der stofflich-energetische *Informationsträger*.

Er *bewirkt* im *Empfangssystem* und dessen Umgebung etwas.

Deswegen ist die *Wirkung* bei Information so wichtig.

# **Zur Informationstheorie**



# Eine ungewöhnliche Schallplatte

Es gibt eine besondere Schallplatte der **V. Sinfonie op. 67**, c-moll von LUDWIG VAN BEETHOVENS (1770 - 1827). Sie enthält das „Klopfen“ des *Schicksals* = Pausezeichen des *Londoner Rundfunks*.

Auf das Hören stand in Deutschland die Todesstrafe. V steht auch für *Vergeltung* und *Victory*.

Sie ist Mitschnitt aus dem Admiralspalast in Berlin (Metropol-Theater) und gilt als **die** authentische Aufnahme. Die Aufführung erfolgte 1946 unter dem Dirigat von WILHELM FURTWÄNGLERS (1886 - 1954) unmittelbar nach seiner Entnazifizierung als Mitläufer.

Mit diesem Konzert wollte er das Wiedererwachen des demokratischen Lebens in Deutschland unterstützen.

Er war nie Mitglied der NSDAP, rettete nachweisbar durch persönlichen Einsatz reichlich 200 Juden das Leben.

Er hatte nie zu Hitlers Geburtstag oder Parteitag dirigiert.

Daher wurde er von HERBERT VON KARAJAN (1908 - 1989) 1942 abgelöst und emigrierte 1944 in die Schweiz.

Dem „Wunder“ KARAJAN wurde aber nie der Prozess gemacht, obwohl er in Deutschland und Österreich Mitglied der NSDAP war. Er durfte sogar sofort nach 1945 dirigieren.



# Musikrezeption

*Nicht jeder* kann die *Erhabenheit* der Aufnahme der V. Sinfonie FURTWÄNGLERS *empfinden, rezipieren*. Dazu gehören beachtliche *Musikerfahrung* und *Vergleichsmöglichkeit* mit anderen Aufnahmen der V.

*Menschen* sind *unterschiedlich*. So bewirkt ein Informationsträger (Schallplatten) unterschiedliche Informaten.

Dies ermöglicht eine *Verallgemeinerung*:

Menschen sind in einem *Kulturkreis* aufgewachsen und erwerben dort ihre *Sozialisierung*.

Dabei entstehen teilweise vergleichbares Verhalten und Rezeption, jedoch mit individuellen Ausprägungen.

So kann ein stofflich-energetischer Informationsträger (Schallplatte) bei vielen *fast gleiches Verhalten* auslösen.

Das erschwert aber das Verständnis von und Verhalten in einem anderen Kulturkreis.

So besitzen nur wenige Europäer die Fähigkeit eine indische *Raga* oder *chinesische Oper* zu genießen.

Überwiegend erfolgt also die menschliche Kommunikation mittels festgelegter Informationsträger des gemeinsamen kulturellen Milieus.

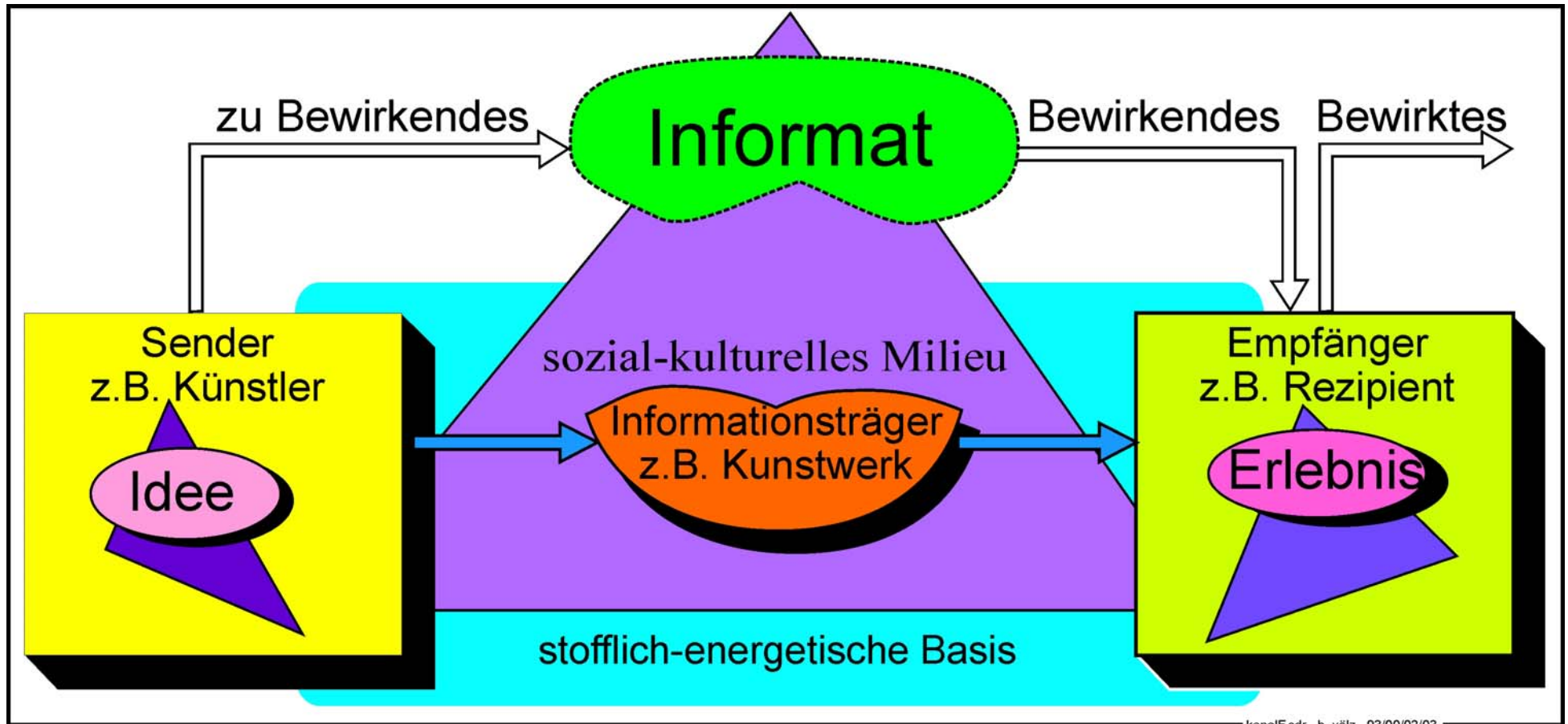
Schematisch zeigt dies das folgende Bild. Dabei entwickelt z. B. ein Künstler oder Wissenschaftler eine *Idee*.

Sie kann er nicht direkt mitteilen. Er muss sie auf einen stofflich-energetischen *Informationsträger* reduzieren.

Ihn empfängt der Rezipient und als *Ergebnis interpretiert* gegebenenfalls eine ähnliche Idee.

Bezüglich der Information sind daher zu unterscheiden:

zu Bewirkendes = 1. Informat  $\Rightarrow$  Bewirkendes = Informationsträger  $\Rightarrow$  Bewirktes = 2. Informat.

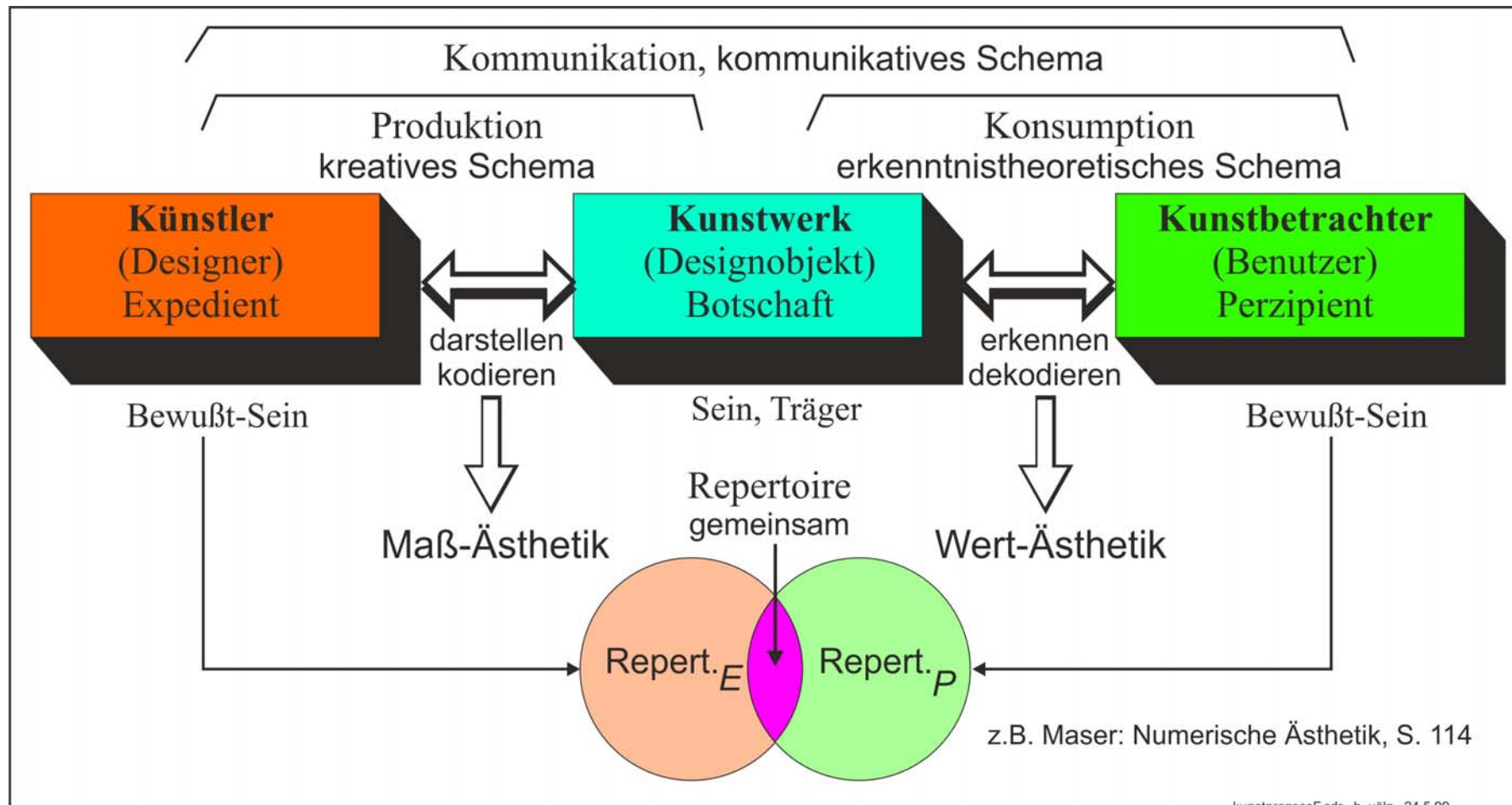


Das sozial-kulturelle Milieu (lila Dreieck) ist in jedem Menschen etwas anders ausgeprägt.  
 Der Informationsaustausch (*Getragenes*) zwischen Menschen (allgemein = Systeme) kann nur über stofflich-energetische *Informationsträger* erfolgen.  
 So weichen die „Idee“ des Senders und das „Erlebnis“ des Empfängers zumindest etwas voneinander ab.

# Übliches Modell

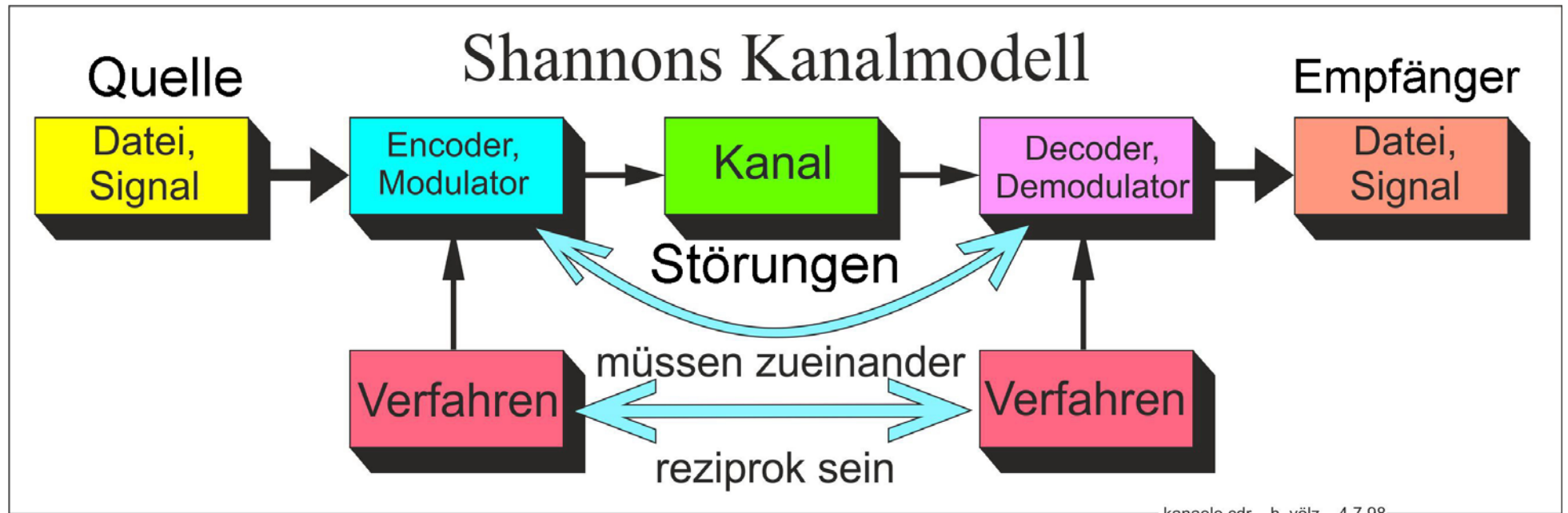
In der **Kunst** werden die Zusammenhänge etwas anders dargestellt.

Das sozial-kulturelle Milieu wird dann zum gemeinsamen Repertoire (Zeichen) von Künstler und Perzipient.



kunstprozessF.cdr h. völk 24.5.99

# SHANNON-Kanal



Encoder und Decoder ermöglichen die (technische) Anpassung an den benutzten Kanal.  
Sie müssen zueinander reziproke Eigenschaften besitzen und möglichst weitgehend Störungen unterdrücken.



# Kartenspiel für ein Quelle-Empfänger-Modell

Für ein vereinfachtes *Kanalmodell* gilt:

Die *Informations-Quelle* sendet aus einem **Alphabet** nacheinander (zufällig) ein Zeichen  $z_i$ .





Jedes Zeichen tritt dabei mit einer **Wahrscheinlichkeit**  $p_i$  auf. Dabei gilt  $\sum p_i = 1$ .

Der Empfänger muss das Zeichen mittels eindeutiger *Ja/Nein-Entscheidungen* erkennen.

Die Zusammenhänge werden durch ein *anschauliches Spiel* mit speziellen Wahrscheinlichkeiten demonstriert:

Alphabet: **Z**,  $p_Z = 0,5$ ; **M**,  $p_M = 0,25$ ; **D** und **A** mit  $p_D = p_A = 0,125$  wird durch eine 4 Klasseneinteilung erzeugt.

Der *Sender* (Zufallsgenerator) mischt die Karten, zieht eine heraus, deren Klasse erraten werden muss.

Zufallsgenerator mittels 4 Klassen von Karten			
			
<b>Z</b> , Zahlen 16 Karten, 50%	<b>M</b> , Männer 8 Karten, 25%	<b>D</b> , Damen 4 Karten, 12,5%	<b>A</b> , Asse 4 Karten, 12,5%

—kartenshannon.cdr h. vözl 3.11.00—

# Die Fragestrategie

Der **Empfänger** ist der Ratende, er bekommt die Karte nicht zu sehen.

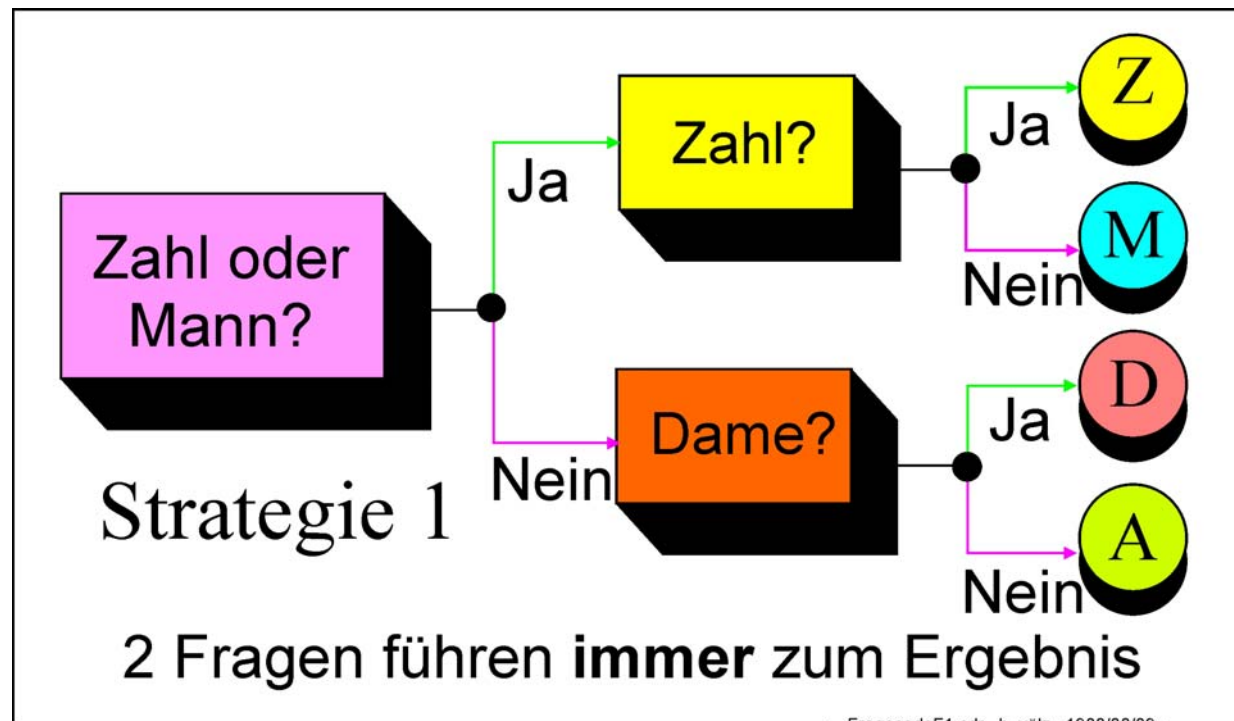
Zur Bestimmung der Klasse darf er beliebige, aber eindeutig mit Ja oder Nein zu beantwortende **Fragen stellen**.

Jede einzelne Ja/Nein-Frage beseitigt dabei eine „Unsicherheit“ für die Erkennung der wert beträgt **1 Bit**.

Das Ziel ist nun, im statistischen Mittel pro Karte mit **möglichst wenig Fragen** auszukommen.

Hierzu muss er eine **Fragestrategie** entwickeln. Sie kann als **binärer Baum** (Codebaum) dargestellt werden.

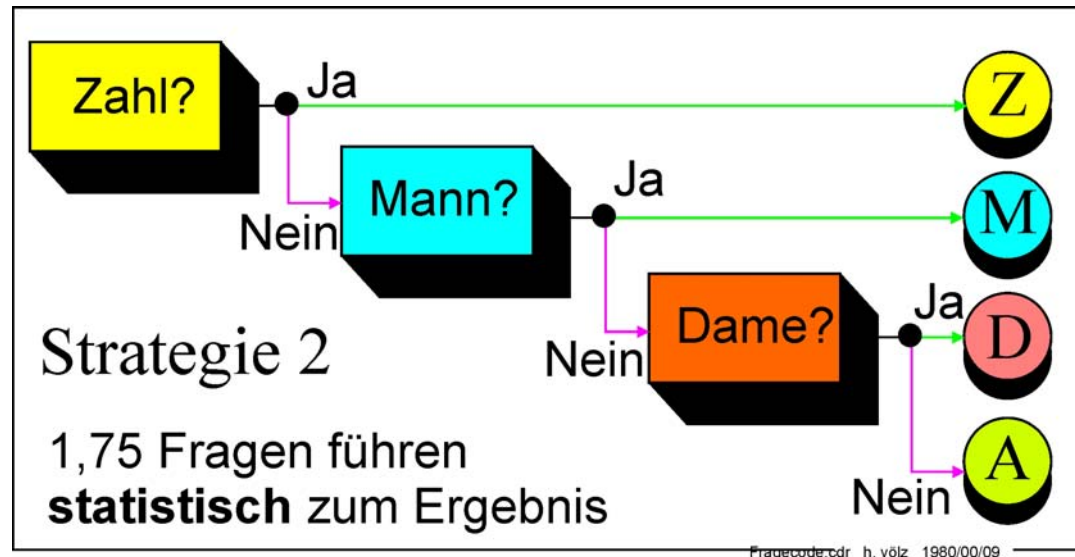
Die „klassische“ Variante arbeitet mit „Halbierungen“ und benötigt in diesem Fall 2 Fragen.



FragecodeF1.cdr h. vözl 1980/00/09

# Verbesserung

Besser ist die folgende Strategie.



Bei ihr sind jedoch teilweise weniger (**Z**) oder mehr Fragen (**D**, **A**) erforderlich.



# Bestimmung der gemittelten Fragenzahl

Zu jedem Zeichen  $z_i$  mit der Wahrscheinlichkeit  $p_i$  gehören  $l_i$  Fragen (Länge).

Dann beträgt die statistisch gemittelte Anzahl der Fragen je Zeichen, sie entspricht dem Codeaufwand

$$A = \sum_{i=1}^n p_i \cdot l_i .$$

Für die Strategie 2 ergibt sich die folgende Rechnung

Zeichen $z_i$	Wahrscheinlichkeit $p_i$	Fragenzahl $l_i$	$p_i \cdot l_i$
Z	0,5	1	0,5
M	0,25	2	0,5
D	0,125	3	0,375
A	0,125	3	0,375
<b>Aufwand A</b>			<b>1,75</b>

# Die SHANNON-Entropie ist der minimale Grenzwert

Ihre Formel - die später erklärt wird - lautet:

$$H = - \sum_{i=1}^m p_i \cdot \lg(p_i).$$

Im oberen Beispiel wurde für die Wahrscheinlichkeitsverteilung absichtlich als Schulbeispiel gewählt.

Doch nicht immer ist es möglich, eine Fragstrategie zu finden, die den kleinstmöglichen Wert erreicht.

Wenn sie gefunden ist, gibt es keine bessere, aber vielleicht gleichwertige.

Nach ihnen lohnt es sich nicht zu suchen.

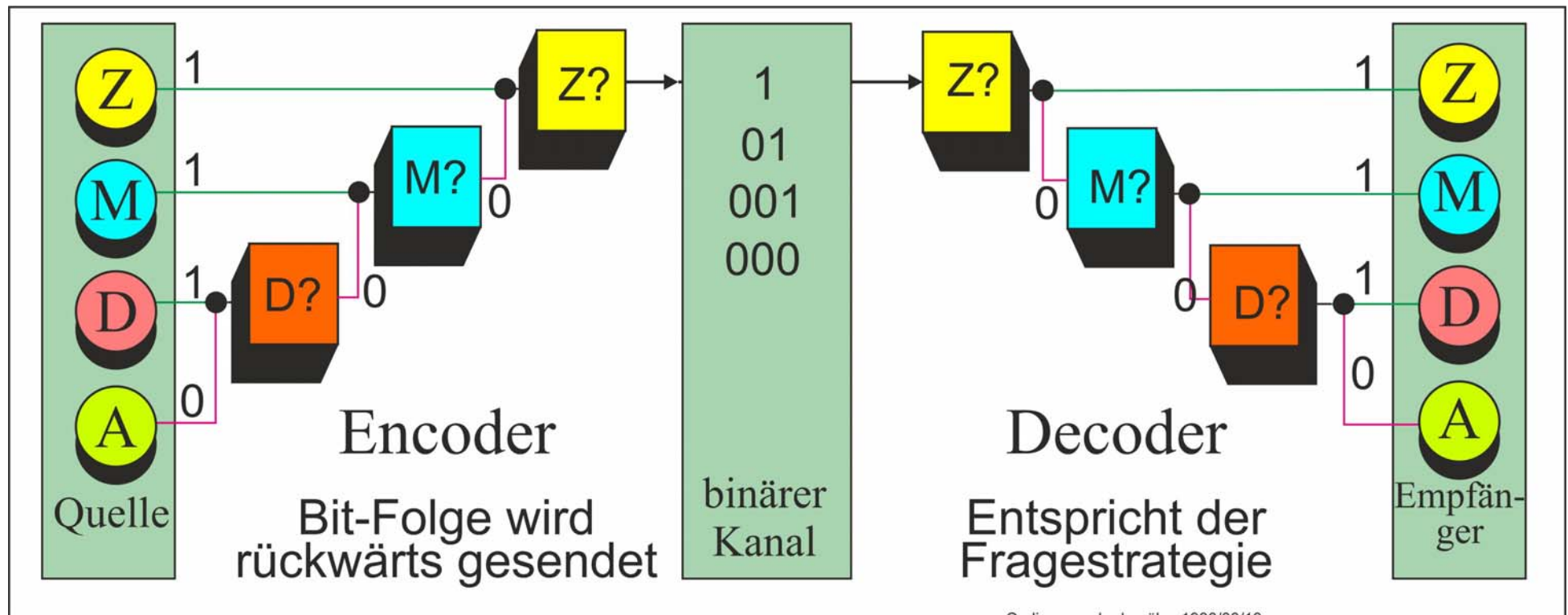
# Anwendung auf die Übertragung

Die **Zeichen** (Z, M, D und A) entsprechen dem Anfang und das Ende der Übertragungskette.

Übertragen werden nur = 0/1-*Codes*, also 1: 01; 001 und 000.

Sie sind durch die Eigenschaften des digitalen Übertragungskanal bestimmt.

So ergibt sich das Bild:



Codierung.cdr h. vözl 1980/00/13

# Ableitung der Entropie-Formel 1

Wichtig ist die Zuordnung zwischen den Zeichen (Z, M, D und A) und den Bits =Codes (1: 01; 001; 000).  
Theoretisch (allgemein) gibt es  $n$  Zeichen und dazu gehörende binäre Speicher. Dabei gilt:

Mit  $m$  Speicherplätzen sind  $n$  Zeichen darzustellen

Zwischen beiden gilt der Zusammenhang (binärer Logarithmus =  $\text{ld} = {}_2\log$ ):

$$n = \text{ld}(m) \text{ bzw. } m = 2^n$$

Für 4 Speicherplätze ergibt sich so die folgende Tabelle (Beispiel **rot** umrandet: **F** = **0101**):

4 binäre <b>Speicherplätze</b> = <b>0/1</b> -Signal-Länge	<b>16 nutzbare Zeichen</b> , mögliche Zustände Zeichen-Realisierungen oben, binäre Signale darunter															
<b>Mögliche Zeichen</b>	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>	<b>D</b>	<b>E</b>	<b>F</b>	<b>G</b>	<b>H</b>	<b>I</b>	<b>J</b>	<b>K</b>	<b>L</b>	<b>M</b>	<b>N</b>	<b>O</b>	<b>P</b>
Belegung von Bit 1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
Belegung von Bit 2	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
Belegung von Bit 3	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
Belegung von Bit 4	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Für die **Informationsmenge** (Entropie bei Gleichverteilung) gilt hierbei:

$$H_{Gl} = n = \text{ld}(m)$$

## Ableitung Teil 2

Für die *gleichwahrscheinlichen Signale* beträgt die *Wahrscheinlichkeit*  $p = 1/m$ , dann folgt:

$$H_{Gl} = \lg(m) = 1/\lg(p) = -\lg(p)$$

Das *negative Vorzeichen* ist also notwendig, weil für  $p < 1 \Rightarrow \log(p) < 0$  folgt, aber  $H$  positiv sein soll. Achtung! Es hat also nichts mit ~~Neg-Entropie~~ zu tun. Darauf wird noch später eingegangen.

Die einzelnen Zeichen treten jedoch meist mit unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten  $p_i$  auf.

Für eine *statistische Mittelwertbildung* ist weiter die Summe  $\Sigma$  erforderlich.

Wie in der Statistik üblich ist dabei noch eine *Bewertung* mit Gewicht  $p_i$  notwendig und es folgt:

$$H = - \sum_{i=1}^m p_i \cdot \lg(p_i).$$

So ergibt sich:

*Informationen* (Entropien) werden *addiert*, aber *Wahrscheinlichkeiten* werden **multipliziert**.

Für Gleichverteilung folgt wieder die obige Formel. Allgemein gilt daher:

$$H \leq H_{Gl}$$

Die *Gleichverteilung* kann als zur Abschätzung als höchstmöglicher Grenzwert der Entropie benutzt werden.

# Voraussetzungen

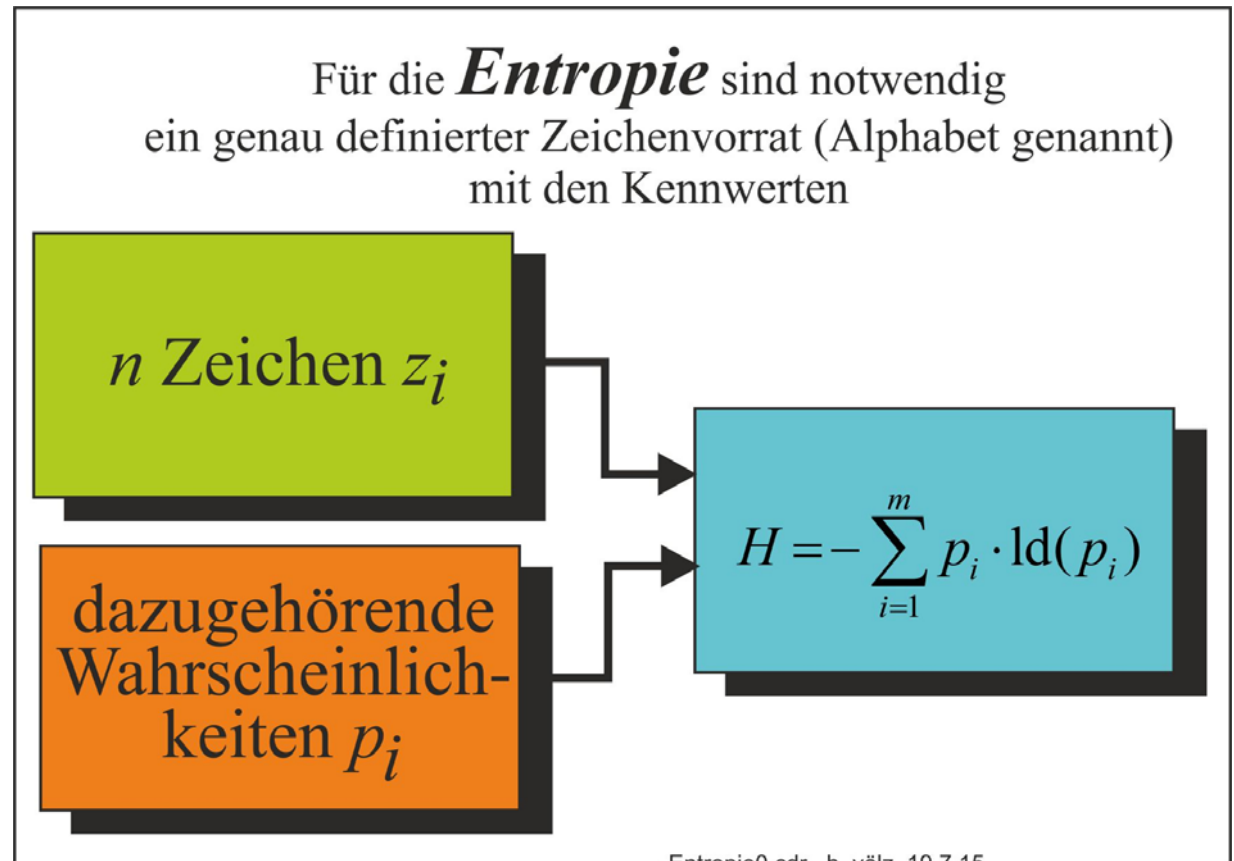
Ingesamt ergibt sich so das nebenstehende Bild für die Entropie.

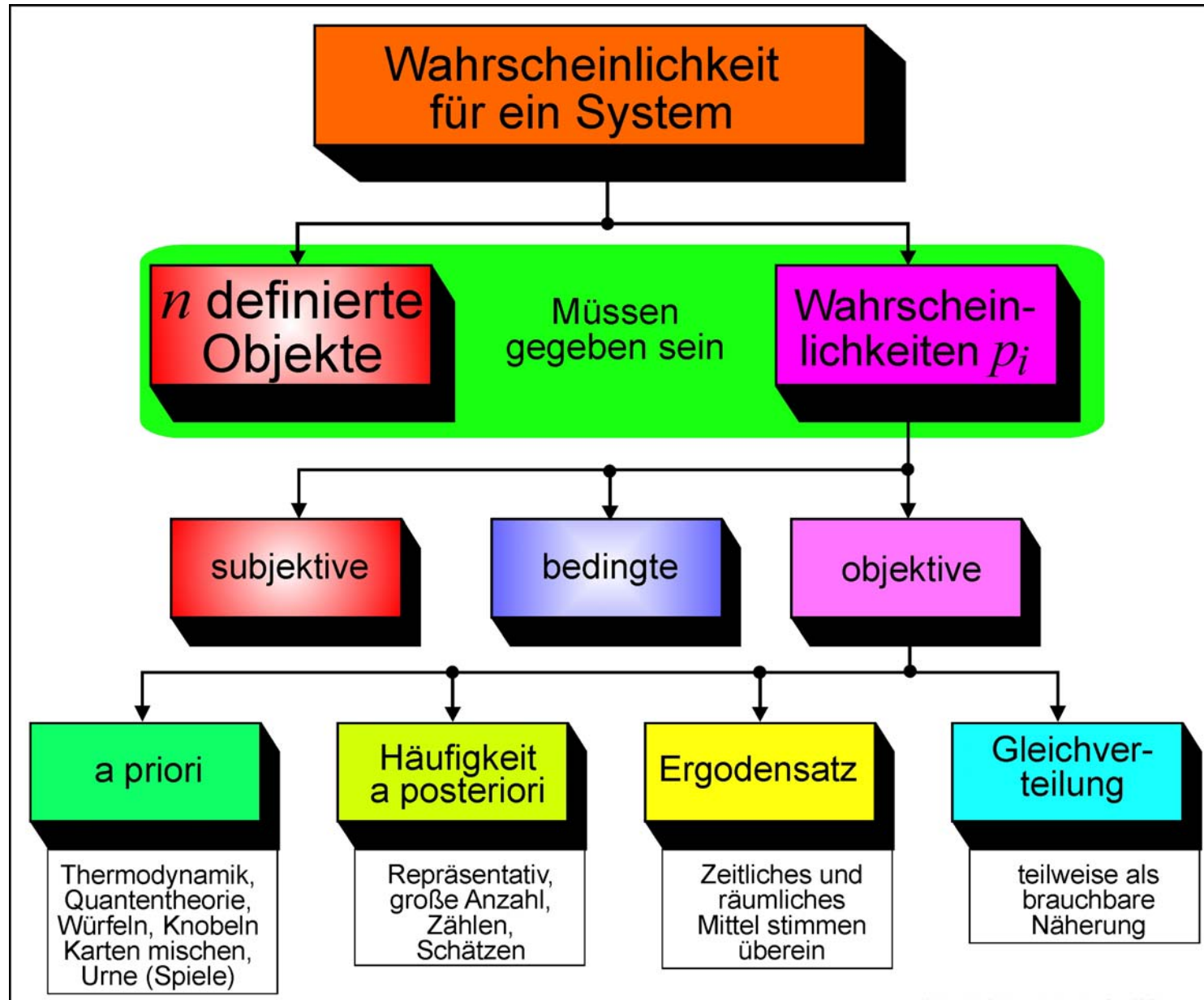
Wichtig ist immer, dass zu Beginn zweierlei genau bestimmt sein muss

- Der **Zeichenvorrat**, der auch „Alphabet“ genannt wird, das sind die  $n$  Zeichen  $z_i$ .
- die zu den Zeichen gehörenden **Wahrscheinlichkeiten**  $p_i$ .

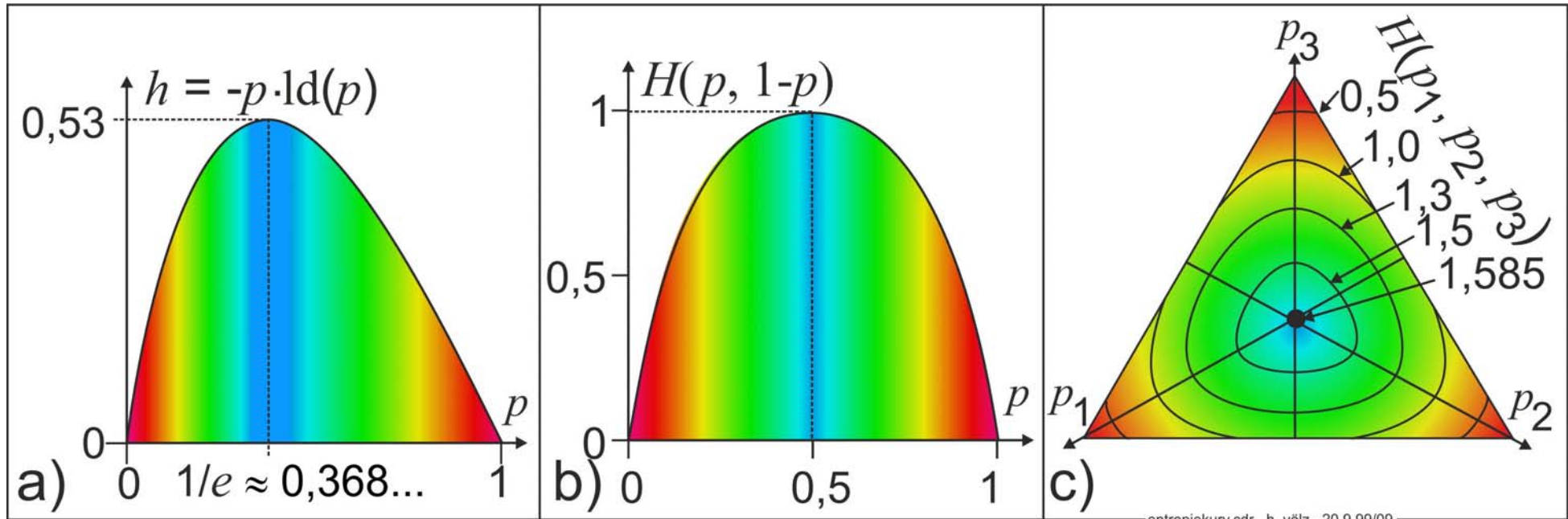
Dabei sind auch die o. g. **Arten der Wahrscheinlichkeiten** zu berücksichtigen.

So ergibt sich das folgende Bild.





# Verlauf der Entropie



Das Bild a) zeigt den Verlauf für den **Einzelterm**  $-p \cdot \lg(p)$ . Er besitzt das Maximum 0,53. bei  $p = 1/e \approx 37\%$ . Hierauf ist noch einzugehen (s. u.).

Für **zwei Zeichen** mit  $p$  und  $1-p$  gilt der symmetrische Verlauf von b).

Für drei Zeichen mit  $p_1 + p_2 + p_3 = 1$  gilt das Trigramm c).

Das Maximum tritt bei Gleichverteilung mit  $p_1 = p_2 = p_3 = 1/3$  auf.



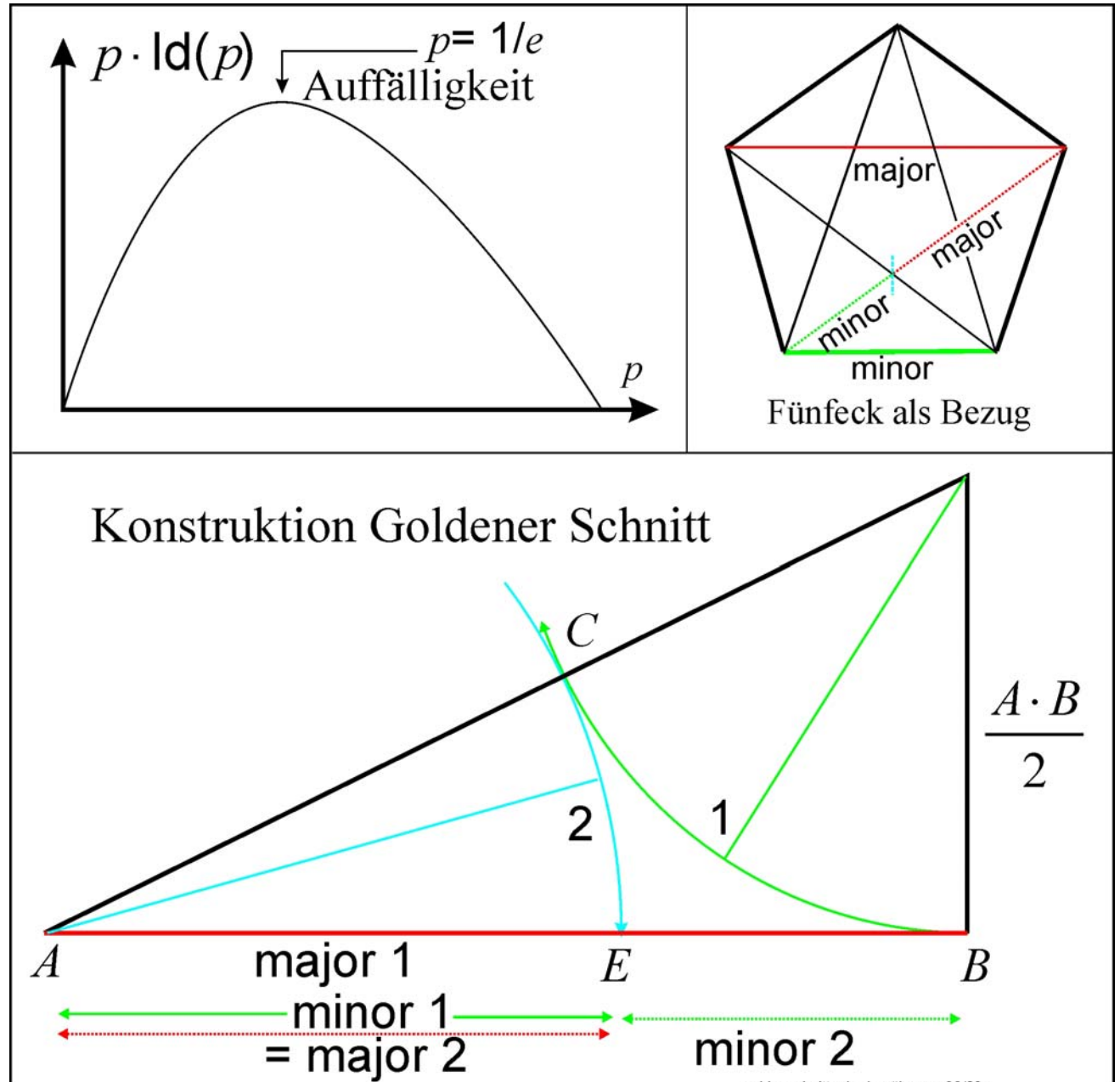
# Goldener Schnitt

Für den unsymmetrischen Verlauf von  $p_v \cdot \text{ld}(p_v)$  fand H. FRANK 1965 die Auffälligkeit des Maximums. Erste Ergebnisse bereits im Teil 1. Hierzu erhielt er viel Kritik, weil der Wert oft mit dem Goldenen Schnitt übereinstimmt:

Weiß bei „Iphigenie“ von ANSELM FEUERBACH und „Blauen Pferde“ von FRANZ MARC. Sowie GUSTAV THEODOR FECHNERS Untersuchungen zum schönsten Bildformat.

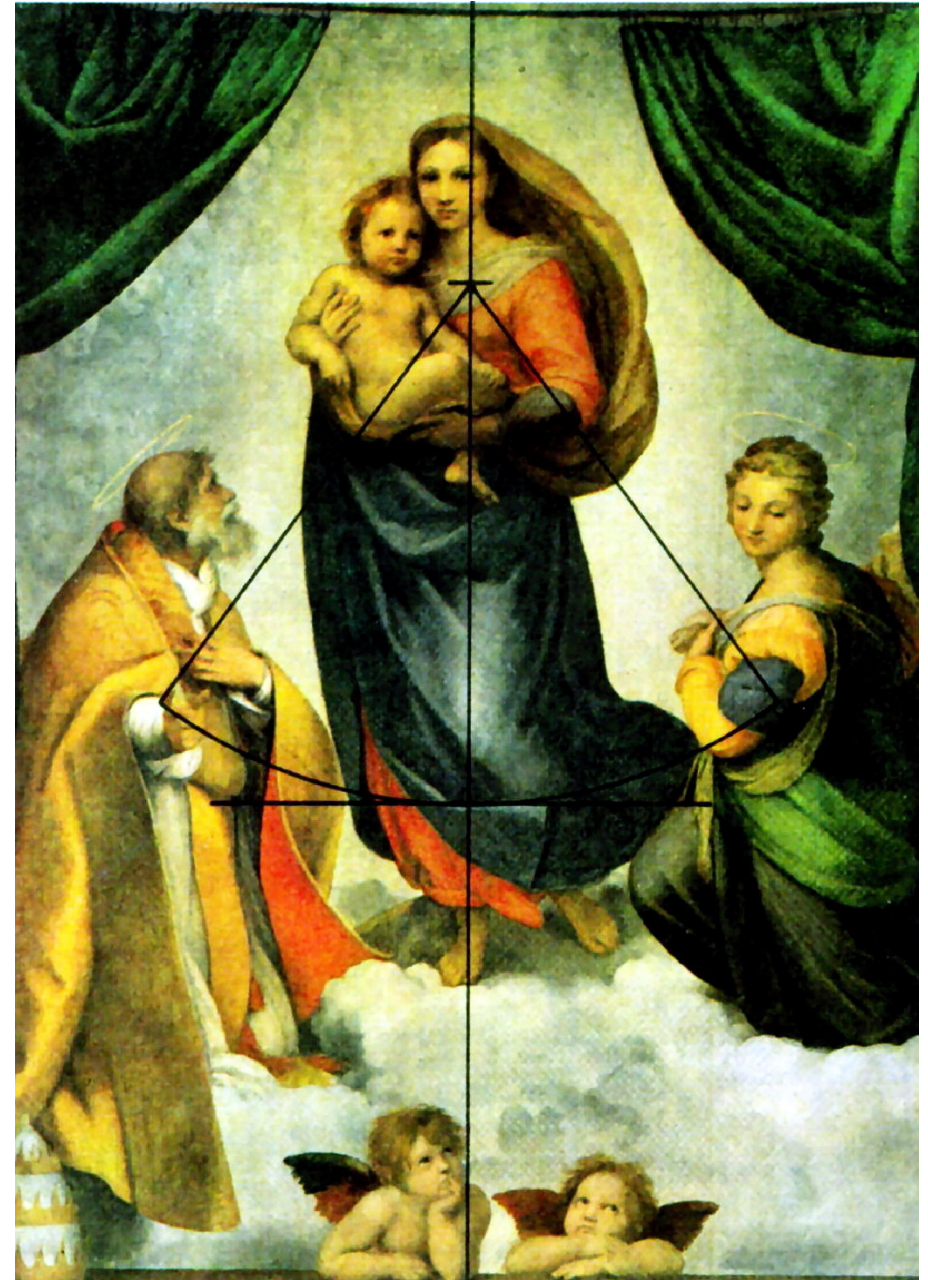
Der Goldene Schnitt war bereits den Pythagoreern bekannt und leitet sich u.a. vom 5-Eck ab.

Sein Wert beträgt (Major/Minor) =  $b/a = (\sqrt{5} - 1)/2 = 0,61803$   
bzw.  $1 - b/a = 38,197\%$



# Beispiel Sixtinische Madonna von Raffael

gezeigt sind auch die Hilfskonstruktionen.



# Goldener Schnitt und Auffälligkeit

Die Abweichungen zwischen Goldenem Schnitt und Auffälligkeit sind recht gering.  
Das gilt sogar bezüglich einfacher rationaler Näherungen.

Merkmal	Goldener Schnitt	Auffälligkeit
Wert	$\frac{1}{2} \cdot (\sqrt{5} - 1)$	$1 - 1/e$
Näherung	0,61803	0,63212
Restwert	0,38197	0,36788
Rationale Näherungen mit Fehlern	2:3 4,9 %	2:3 3,5 %
	3:5 -1,8 %	5:8 -0,7 %
	5:8 0,7 %	7:11 0,4 %
	8:13 -0,3 %	12:19 -0,05 %
	13:21 0,1 %	55:87 6E-5
	21:34 -0,04 %	67:106 -5E-5
	34:55 0,01 %	122:193 3E-6
	55:89 -5E-5	
	89:144 2E-5	

Es ist aber zu beachten, dass das übliche **DIN-Format** mit  $1:\sqrt{2} \approx 0,707$  deutlich erheblich größer ist.

**Goldener  
Schnitt**

**Auffälligkeit**

**DIN**

— aufgolden2.cdr h. vözl 14.3.01 —

# Auch in der Natur

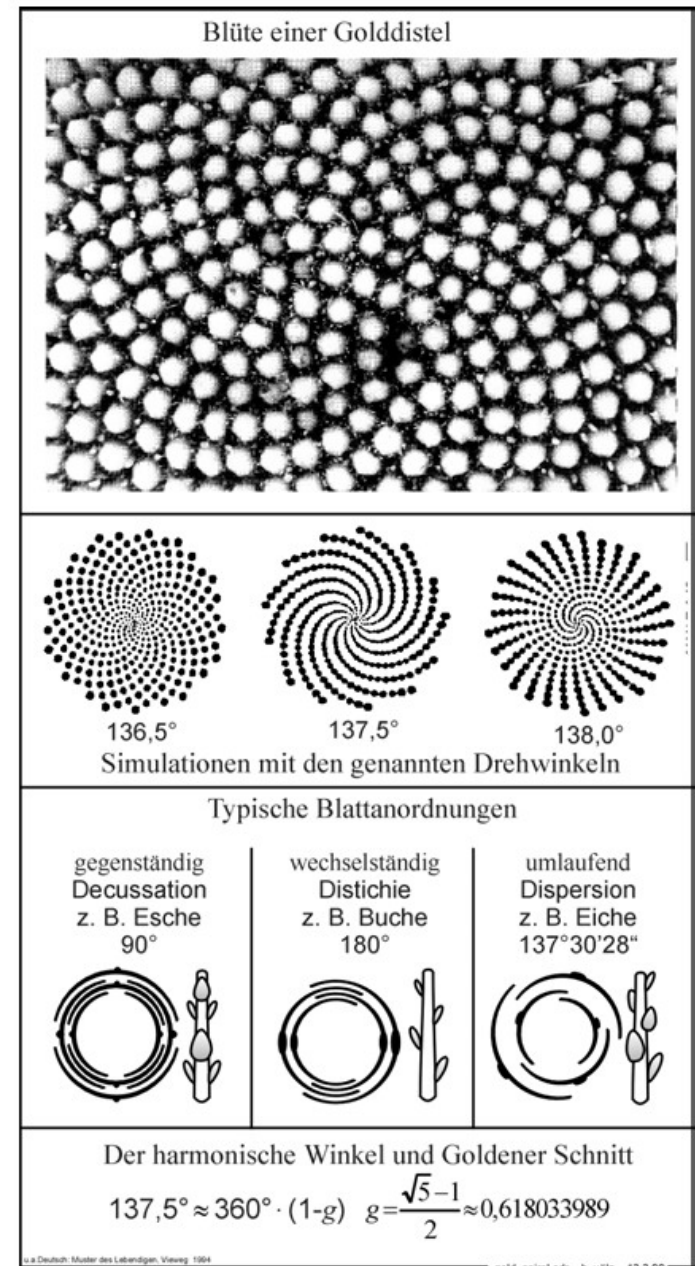
Das folgt allgemein aus den drei Blattanordnungen der Pflanzen.

Besonders deutlich zeigt das die Sonnenblume.

Nur bei einem Drehwinkel von  $137,5^\circ$  bilden sich die *typischen Spiralen* für die Samen aus. Sie treten genau bei  $360^\circ \cdot g$

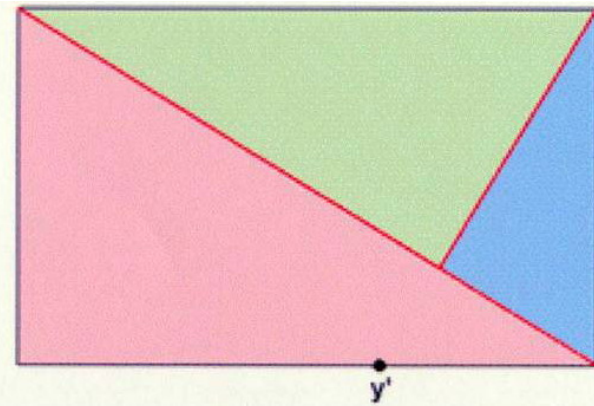
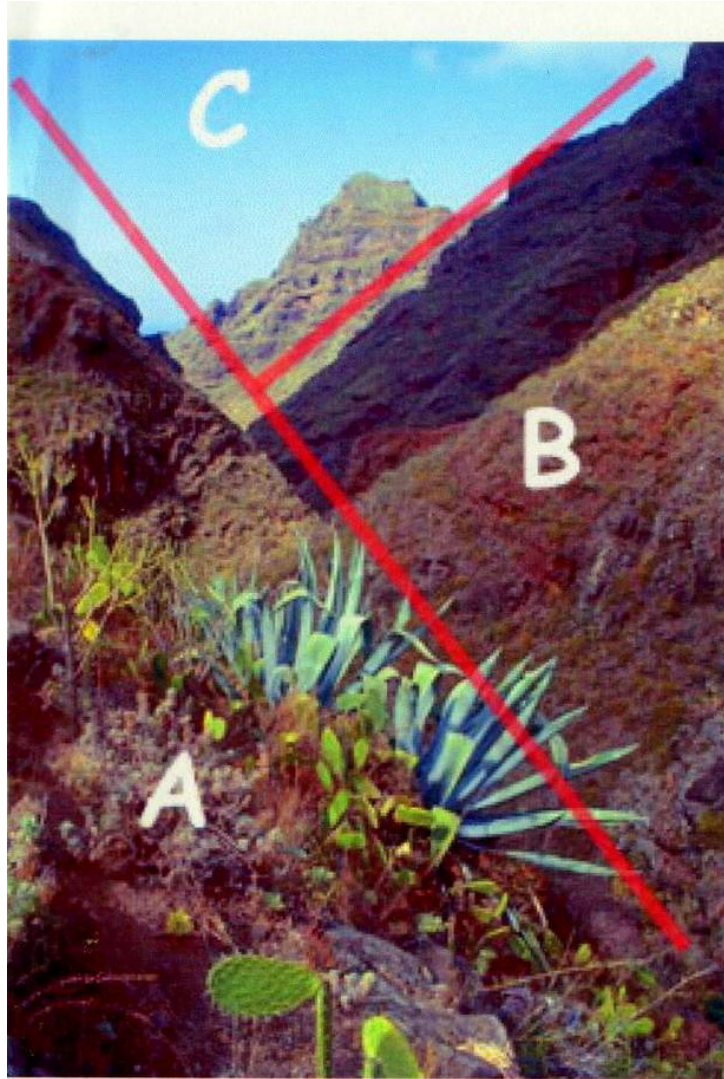
$$\text{mit } g = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,618033989 \text{ auf.}$$

also dem Goldenen Schnitt auf.





## 2/3-Näherungsregel der Fotografie



# Grenzen des Goldenen Schnitts

Er kann folglich nur Bilder und räumliche Gestalten vorkommen  
Jedoch für bei EDGAR ALLEN POE kann er nicht zutreffen

Hear the sledges with the bells, silver bells!  
What a world of merriment their melody foretells!

Auch nicht bei den Synkopen in Jazz und dem Brandenburgischen Konzert.

Noch unverständlicher ist das folgende Ergebnis.

Bei einer Bierrunde entstand zwischen HELMAR FRANK, ABRAHAM MOLES und dem Besitzer eines großen **Berliner Kaufhauses**, die Idee die Auffälligkeit bei Preisen zu überprüfen.

Für etwa 1/3 der Produkte wurden die Preise etwa auf den Einkaufspreis gesenkt.

Sicherheitshalber wurden andere Preise deutlich erhöht.

In kurzer Frist galt dieses Kaufhaus als besonders preiswert und sein Besitzer machte beachtliche Zusatzgewinne.  
Heute wird dieses Prinzip u.a. bei Schnäppchen angewendet.

Für weitere Erkenntnisse stellte dann auch ich Untersuchungen an. Sie betrafen das Haus.

Ich ging davon aus, dass es zwei typischen Kennzeichen besitzt, die vor allem Kinder betonen.

Ein Haus ist ein **Dach** über den Kopf

Ein Haus besitzt **Türen und Fenster**.

Im der Akademie für Architektur und Städtebau machte daher ein Mitarbeiter ohne Kenntnis meiner Annahme an der Ostseeküste Aufnahmen von 24 Häusern. Sie fasst das folgende Bild zusammen

# Schönheit des Hauses

Bei den Bildern wurde der Flächenanteil vom Dach sowie den Fenster+Türen bestimmt.

Sie lagen fast immer in der Nähe der Auffälligkeit.

Daher wurden die Bilder nach diesem Kriterium bewertet.

Die sich ergebende Reihenfolge stimmt dann fast genau mit meiner subjektiven Wertung der Schönheit der Häuser überein.

Das führte zum Protest der Spezialisten. Sie wollten daher eine präzise subjektive Bewertung. Dazu mussten zunächst die Bilder in Skizzen umgewandelt werden, um z. B. den positiven Einfluss von Strohdächern zu vermeiden.

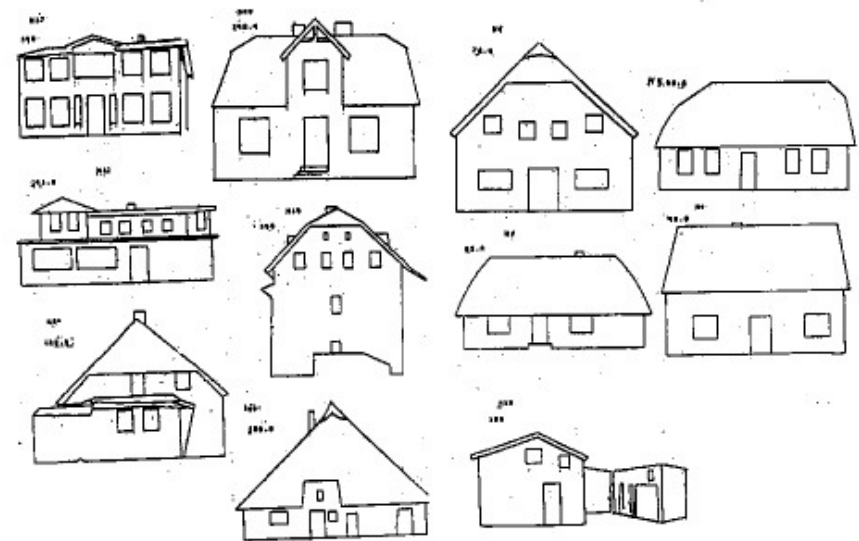




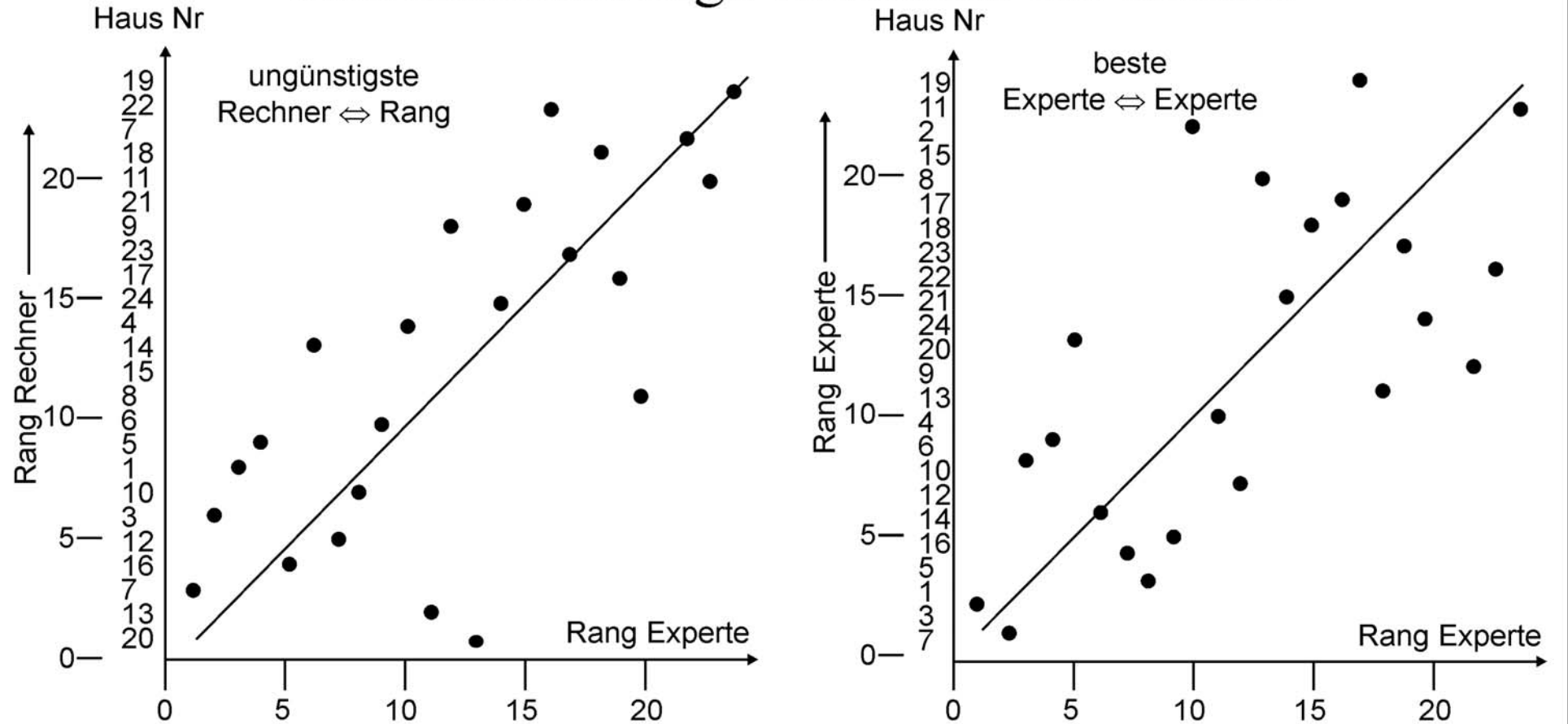
# Schönheit des Hauses 2

20 Experten gaben dann hierzu ihre Urteile ab. Doch das Ergebnis war völlig unerwartet. Die Einschätzung der Experten wichen untereinander mehr voneinander ab, als bezüglich der Computerberechnung. Die Abweichung des Experten mit der schlechtesten Computer-Übereinstimmung war geringer als alle Computeraussagen untereinander.

So erhielt ich 2 Jahre Publikationsverbot und im Nicolai-Viertel von Berlin, wurden die Ergebnisse zuvor berücksichtigt.



# Korrelationen bzgl. Schönheit des Hauses



Hausexperte.cdr h. vözl 1988/09

# Folgerungen

Durch diese und weitere Ergebnisse geriet auch ich in die Kritik bezüglich Auffälligkeit und Goldner Schnitt. Es ergab sich dabei ein umfangreicher kritischer Schriftwechsel.

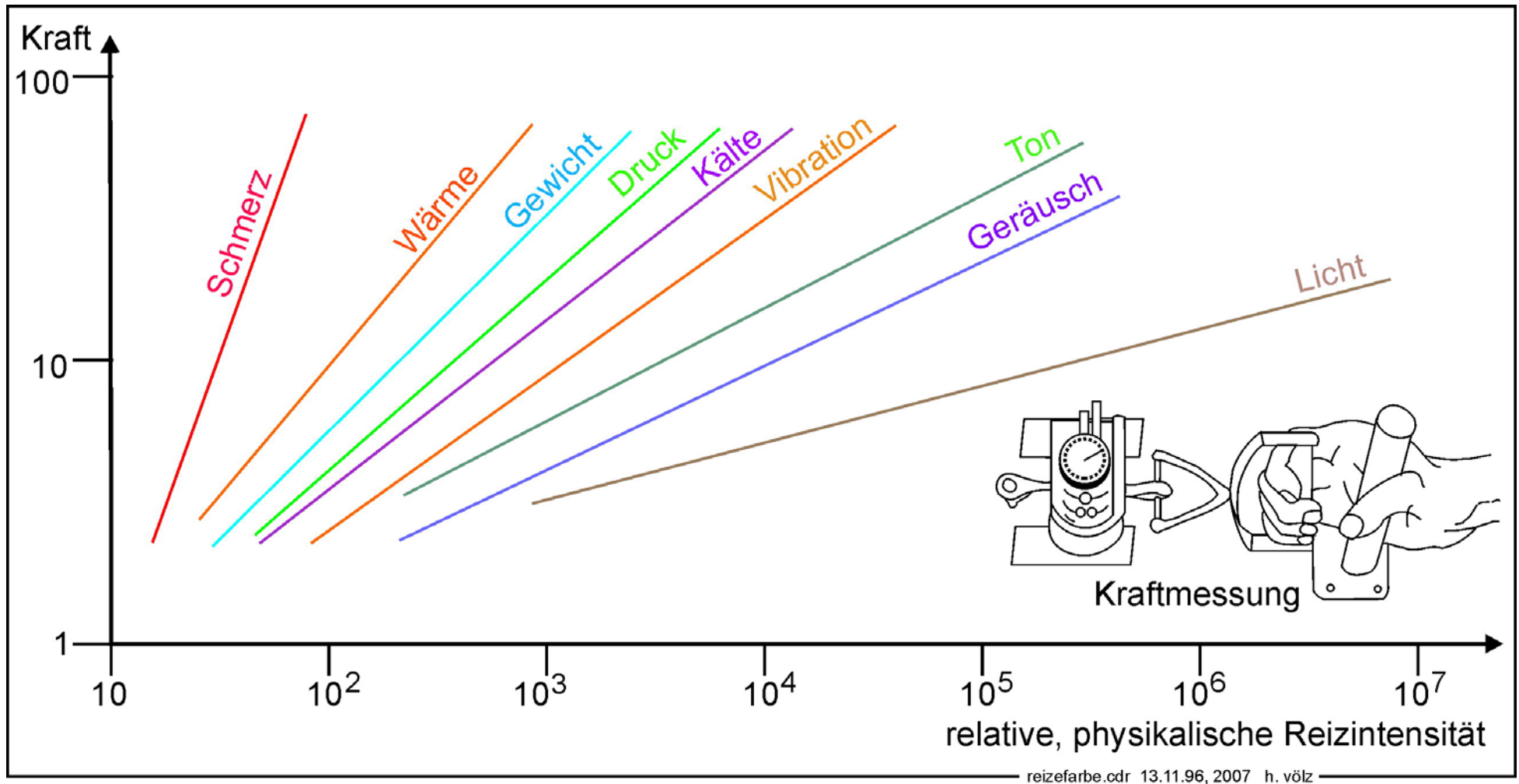
Schließlich wies mich einer (Namen kann ich leider nicht mehr feststellen) auf das WEBER-FECHNER-Gesetz hin. Zwischen der physikalischen Reiz-Energie und der subjektiven Wahrnehmung besteht ein logarithmischer Zusammenhang.

Das führt dann unmittelbar zum Logarithmus in der Auffälligkeit.

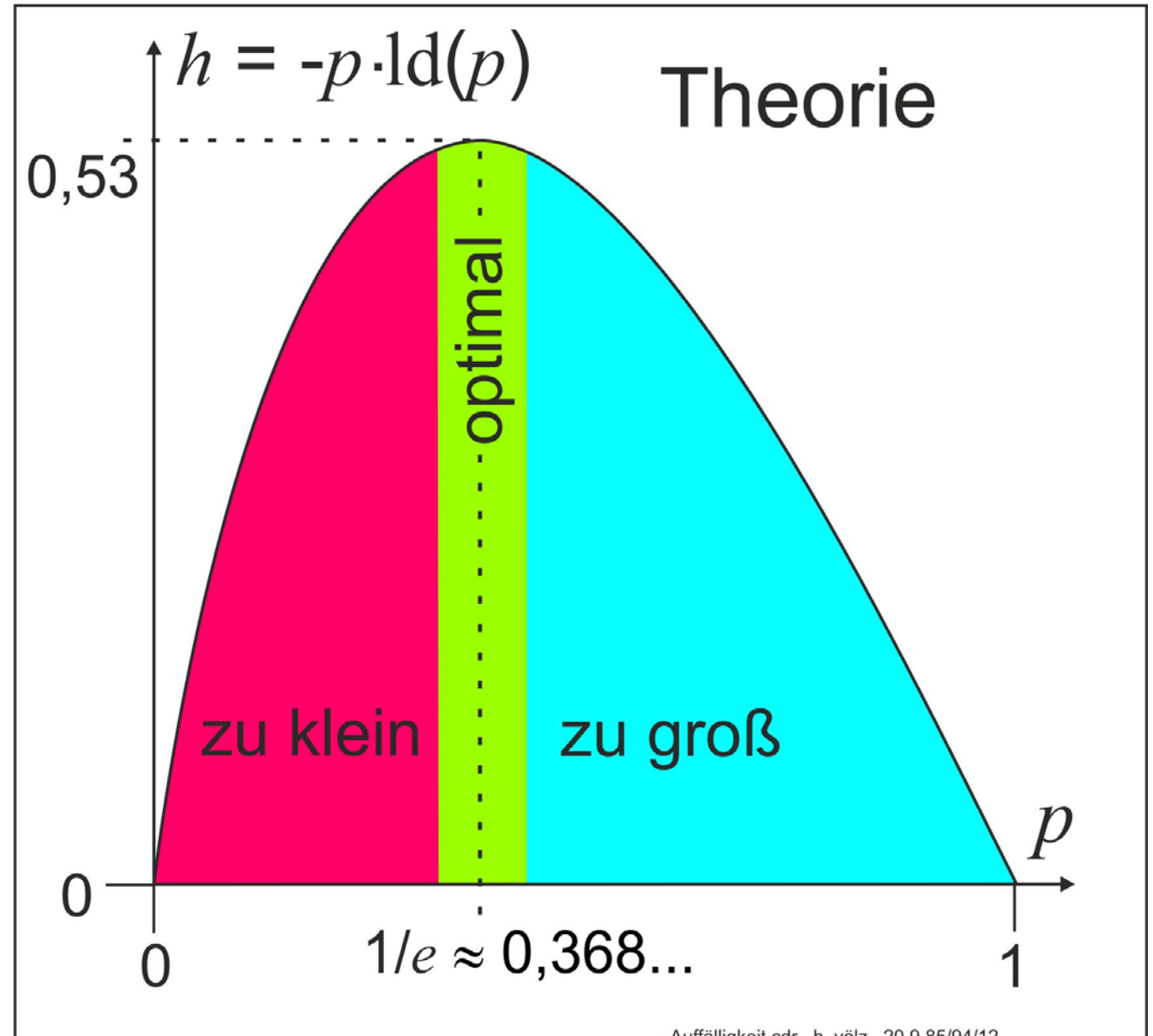
So entstand das *Ergebnis*:

- Die mathematische *Auffälligkeit* gilt universell für *alle Sinneseindrücke*.
- Der Goldne Schnitt ist die *Zirkel-Lineal-Näherung*, die nur für *Bilder* erfüllt sein kann.

# Weber-Fechner-Gesetz



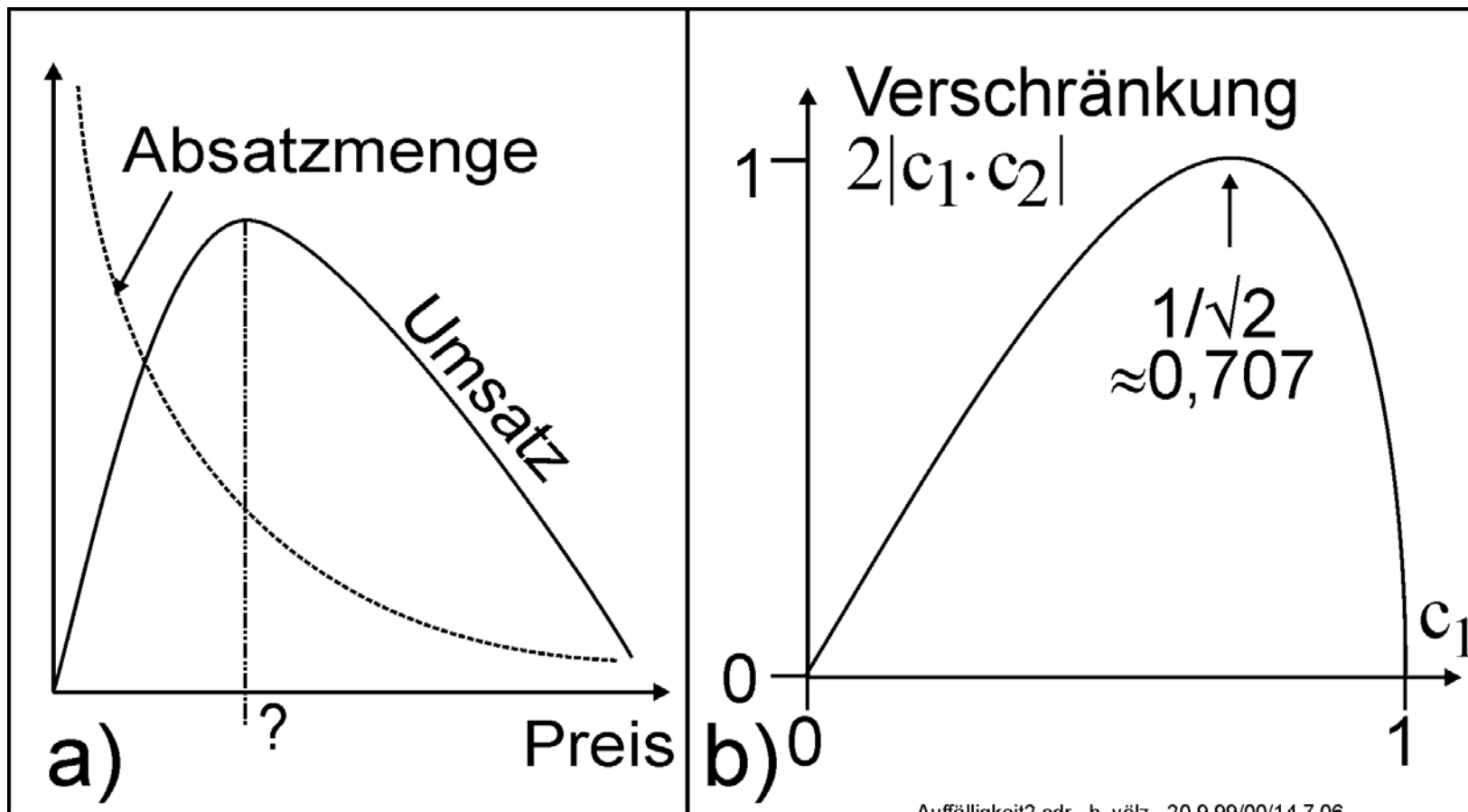
Bezüglich der auffälligsten  
Werte ergibt sich so die  
nebenstehende Interpretation



Auffälligkeit.cdr h. vözl 20.9.85/94/12

# Ähnliche Zusammenhänge

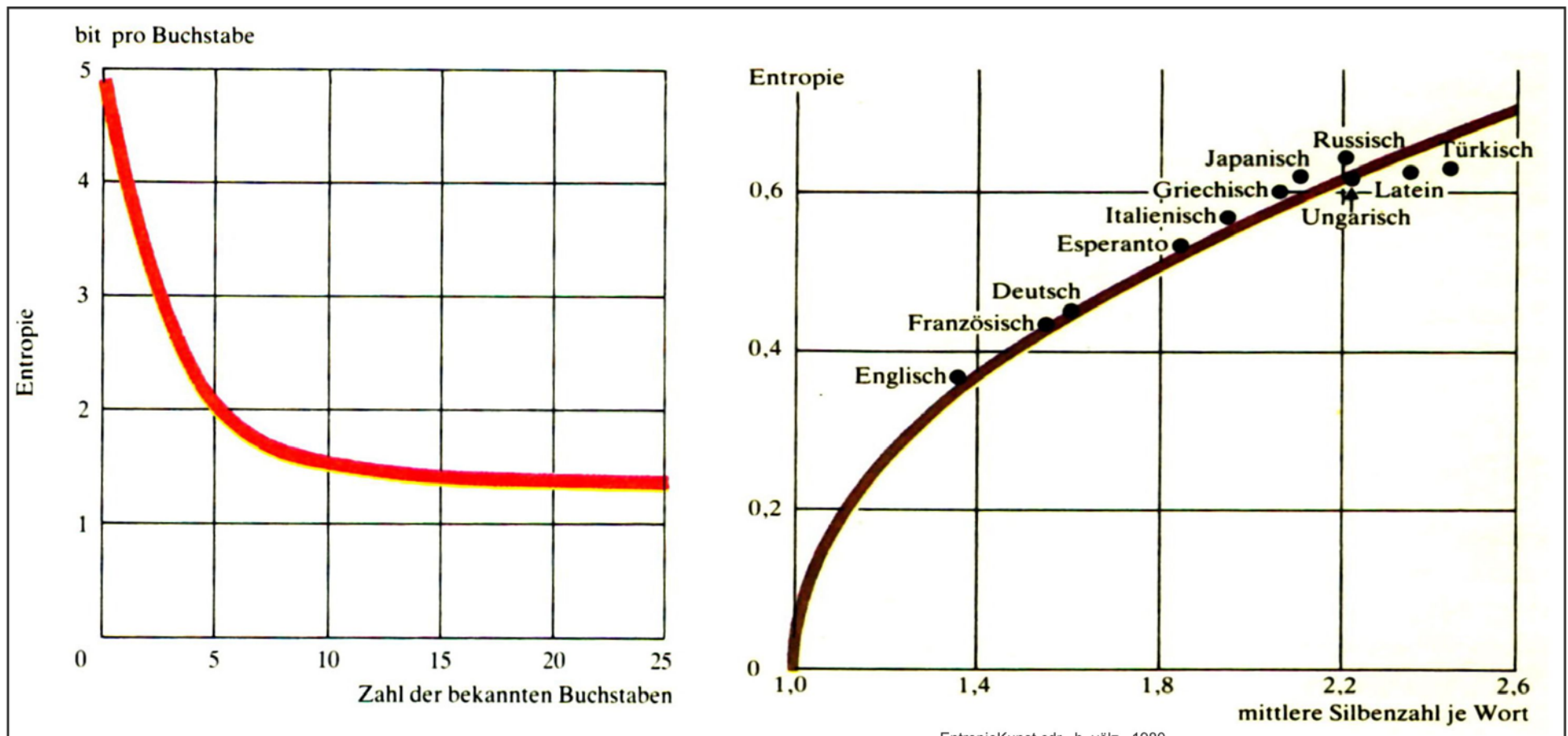
Der typische schiefssymmetrische Verlauf tritt oft auch in anderen Zusammenhängen auf. Zwei Beispiele betreffen die Festlegung von Produktionspreisen und die Verschränkung der Quantentheorie. Ob dabei ein inhaltlicher Zusammenhang besteht ist unklar.



Auffälligkeit2.cdr h. vözl 20.9.99/00/14.7.06

# Ergänzungen zur Entropie

Auch über die Entropie sind Aussagen zur Informationsästhetik möglich.  
Beispiele zeigen die beiden Bilder



EntropieKunst.cdr h. vözl 1980

# Fortsetzung

Der Teil 3 betrifft vor allen:

- Allgemeine Aussagen zur formalen Ästhetik.
- Folgerungen aus den Eigenschaften unseres *Gedächtnisses*.
- Ansätze zur Musiksynthese
- Magic Ey
- Generierung von Bildern durch *Fraktale*.