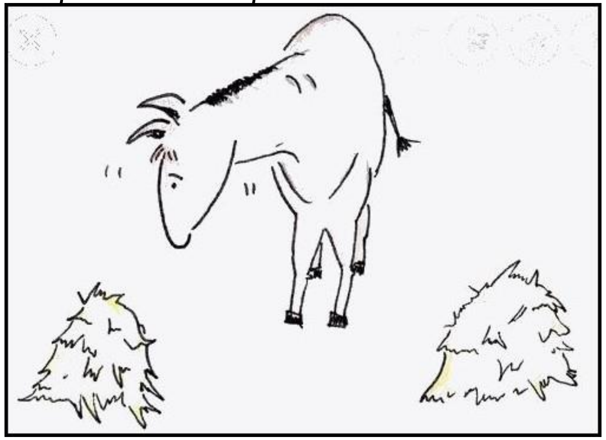
Logik, Zählen, Zahlen, Digitalisierung und Fehlerraten

Die **Logik** mit **Ja oder Nein und** ohne ein **Drittes** gilt häufig als Maßstab für den „gesunden Menschenverstand“.
Doch seit den alten Griechen sind Paradoxien, Antinomien als unlösbare Gegenbeispiele bekannt,
Ein Beispiel betrifft eine *Gerichtsverhandlung*. Der Angeklagte antwortet immer mit langen Ausführungen und der Richter sagt schließlich:

> *„Angeklagter, auf jede Frage kann man kurz mit Ja oder Nein antworten. Ich fordere Sie auf sich daran zu halten“*.
> *„Herr Richter, darf ich eine Frage stellen*?“

Selbstsicher antwortet der Richter *„Ja“* und er darauf:

> *„Herr Richter, haben Sie aufgehört, Ihre Frau zu schlagen?“*



Ein anders Beispiel ist **„Buridans Esel"** nach dem französischen mittelalterlichen Philosophen Buridan - Schüler Wilhelm von Ockhams - bekannt:
Diese Problematik hat wohl erstmalig und besonders deutlich Gottlob Frege kurz vor dem Abschluss des 2. Bandes seines Hauptwerkes „Grundgesetze der Arithmetik“ betroffen: Denn 1901 teilte ihm *Russel* in einem Brief mit:

> *„Die Menge R enthält sich selbst als Element und die Menge R enthält sich nicht selbst als Element.“*

Frege konnte das Problem gerade noch im Vorwort berücksichtigen:

> *„Einem wissenschaftlichen Schriftsteller kann kaum etwas Unerwünschteres begegnen, als dass ihm nach Vollendung seiner Arbeit eine der Grundlagen seines Baues erschüttert werden. In diese Lage wurde ich durch den Brief des Herrn Bertrand Russel versetzt, als der Druck dieses Bandes sich seinem Ende näherte.“*

Um den Inhalt dieser Antinomie zu vermeiden, müssen zunächst alle möglichen Mengen in zwei Klassen eingeteilt:

1. Mengen, die sich selbst als Element enthalten und
2. Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten.

Mit der Theorie der *logischen Typen* zeigten später ***Russell*** und ***Whitehead*** den Ausweg:

„Was immer alle Elemente einer Menge voraussetzt, darf nicht ein Element der Menge sein.“

So werden heute in der Mengentheorie die ***drei Objektarten*** gemäß der nebenstehenden Tabelle eingeführt:

<table>
<tr><td colspan="2">Elemente</td><td rowspan="2">Unmengen</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Urelemente</td><td>Mengen, Nullmengen</td></tr>
<tr><td colspan="2">Klassen</td></tr>
</table>

- *Urelemente* treten als Elemente von Gesamtheiten auf, enthalten aber selbst keine Elemente.
- *Mengen* sind sowohl Gesamtheiten als auch Elemente von anderen Gesamtheiten.
- *Unmengen* sind Gesamtheiten, die aber nicht Elemente anderer Gesamtheiten sind.

Um Widersprüche zu vermeiden führte Tarski eine ***Metasprache*** ein, die in der Objektsprache nicht auftreten darf. Nur mit ihr dürfen dann Aussagen für die Objektsprache erfolgen. Allgemein ist also eine ***Hierarchie der Sprachen*** erforderlich. Denn innerhalb einer einzigen Sprache oder einem logischen System kann es kein Wahrheitskriterium geben. Aber in unserer natürlichen Sprache sind beide Sprachen identisch. Natürlich kann aber z. B. über Englisch (als Objektsprache) in Deutsch als Metasprache geredet werden.

Auf dem Mathematik-Kongress von 1900 forderte Hilbert schließlich die ***vollständige und widerspruchsfreie Axomatisierung*** aller mathematischen Theorien. Äußerst schwerwiegend war es daher, als im Sommer 1930 Gödel den ***Unvollständigkeitssatz*** bewies. Danach kann es keine Theorie geben, welche die *elementare Arithmetik* umfasst und für die folgende Eigenschaften beweisbar sind: Sie ist 1. endlich beschreibbar, 2. in sich widerspruchsfrei und 3. vollständig.

Schließlich sei noch erwähnt, dass bereits für Frege *Gedanken* zwar objektiv, aber weder Dinge der Realität (Außenwelt) noch von (*inhaltlichen* H.V.) Vorstellungen sind. Er ordnet sie einem **dritten Reich** zu, um dadurch Widersprüche, Paradoxien usw. zu vermeiden. 1Daher lautete der letzten Satz in Wittgensteins „Tractatus logico-philosophicus“:

„Worüber man nicht sprechen kann, darüber muss man schweigen“

Schließlich entstanden viele Bücher über Paradoxien usw. die dann aber nur noh zur **Unterhaltun**g, ähnlich den Witzen diente..
Das Problem wird noch dadurch verstärkt, dass Ja/Nein durch die Zahlen **0/1** ersetzt wird (s. u.)

Abzählen

Beim ganz frühen Warenaustauch schätze man auf beiden Seiten den Wert durch die jeweils intuitiv erscheinenden **Mächtigkeiten** ein, die dabei möglichst gleich sein sollten.

Später war das Abzählen der einzelnen Objekte wichtiger. Dafür genügen die **endlich vielen *ganzen Zahlen***.
Teilweise können sogar einige Tiere bis 3 oder sogar bis 10 zählen. Im Laufe der Geschichte entstanden so Zahlzeichen (oder die Möglichkeiten mit dem Stellenwertsystem) von 1 bis $<\infty$

Sehr große Zahlen werden durch Potenzen 10^x im Stellenwertsystem dargestellt

Bei **Unendlich (**∞) treten Widersprüche (Paradoxien) auf.
Typisch dafür ist das ***Hilbert-Hotel***, das unendlich viele Zimmer enthält und das bereits voll belegt ist.
Ein neu ankommender Gast kann daher eigentlich nicht untergebracht werden.
Doch dann zieht der Gast von Zimmer 1 in Zimmer 2 und der in Zimmer 3 usw. Nachdem der neue Gast in das nun freie Zimmer 1 eigezogen ist, sind schließlich alle untergebracht.
Doch damit ist es noch nicht genug. Schrittweise können auf ähnliche Weise sogar unendliche viele neue Gäste Quartier finden.

In ähnlichem Kontext bezeichnete schon Platon die ganzen Zahlen als eine Art leerer Gefäße,
und Kronecker meinte dann viel später:

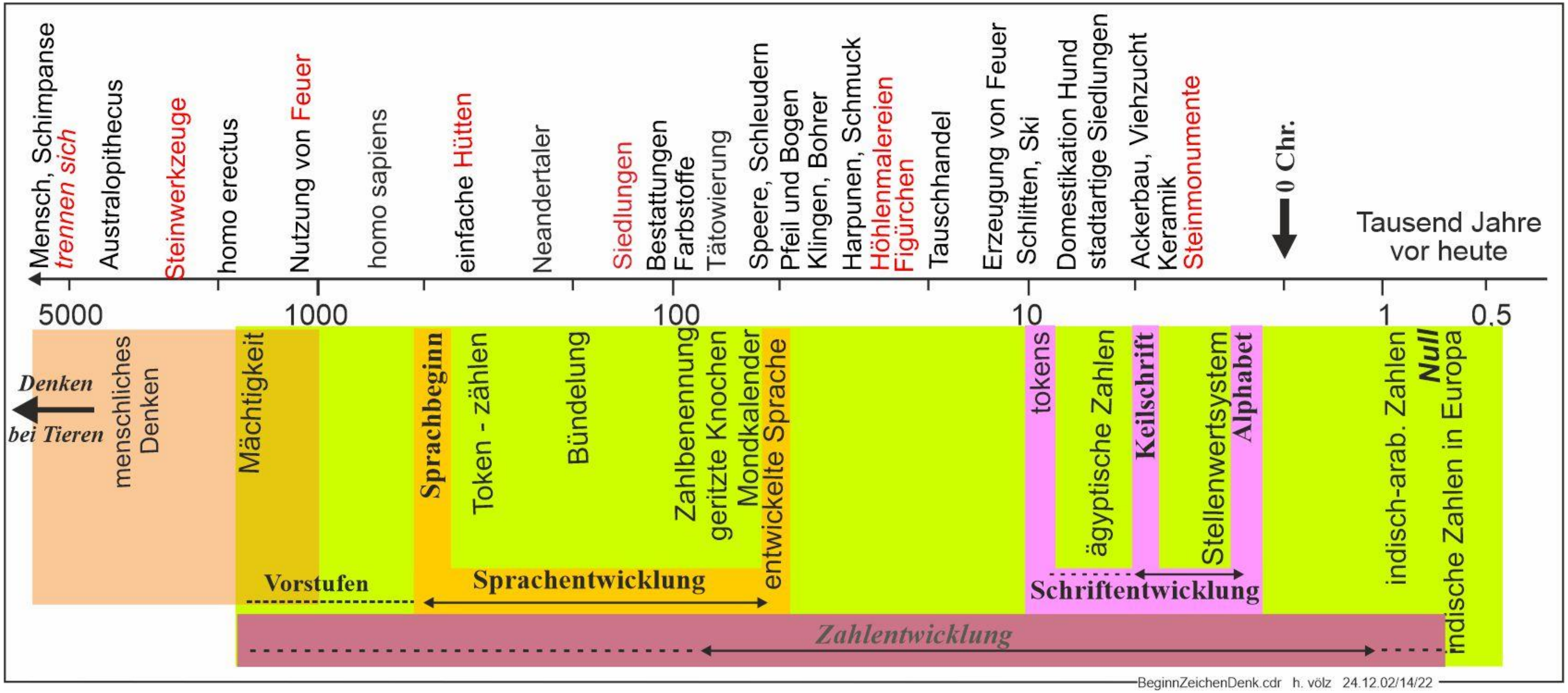
„*Die ganzen Zahlen hat Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk*“.

Daher erscheint bei ihm der liebe Gott auch in seinem Autorenregister.

Die ***negativen Zahlen*** entstehen bei der Subtraktion durch das Abziehen einer kleineren Menge von einer größeren

Die ***Null, das Nicht*** ist eigentlich keine Zahl. Als Nichts muss sie aber dennoch ein (semiotisches) Zeichen erhalte.
Wie schwierig dieser Widerspruch zu bewältigen war, zeigt sich in der langen Zeitdauer bis zu ihrer Einführung

Gebrochene Zahlen



Neben den ganzen Zahlen gibt es u.a. auch **Brüche** wie ½, $^{1}/_{3}$, $^{7}/_{10}$ usw.

Sie sind jedoch nur dann möglich, wenn im Original eine Anzahl vorhanden ist,
die bei der Anwendung wieder zu ganzen Zahlen führt

Von einem Apfel kann man nie einen **exak**t halben herstellen, das ist immer ungenau. Die beiden Teile sind nicht gleich
Ganz analog ist von 1 kg Zucker nicht exakt ein ½ kg abzutrennen.

Reelle Zahlen

Bei Messungen müssen meist Zahlen verwendet werden, die erst durch Subtraktion, Division, Wurzelziehen, Logarithmen usw. erzeugt werden müssen.

nebenstehende Tabelle

Sie ergänzen die ganzen Zahlen, durch Ziffern hinter dem Komma

Allgemeiner hatten hierbei bereits die Pythagoräer Probleme

Als bekannt wurde, dass die Diagonale vom Rechteck nicht ganzzahlig oder als rationaler Bruch zu berechnen sei, sondern etwas Neue eine (√) erforderte
kam angeblich der Kenner hiervon im Schiffbruch um.

Erst viel später war Hermite davon überzeugt, dass alle möglichen Zahlen und Funktionen unabhängig von uns existieren, und zwar genauso wie die Objekte der Realität.

Zusammenhänge der elementaren Funktionen

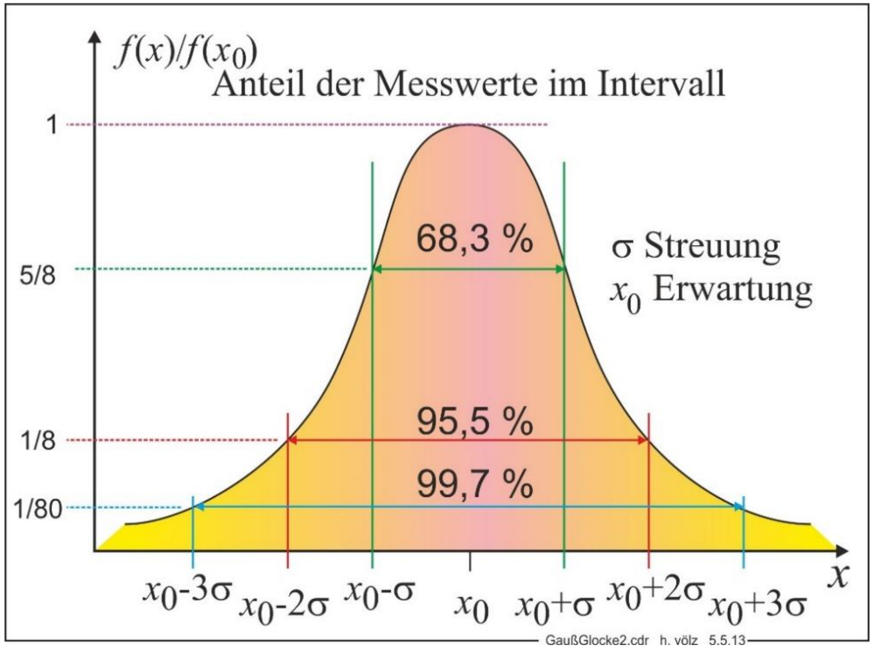
direkt	Umkehrumg
Addition $c = a + b$	$a = c - b$ $b = c - a$ führt zu negativen Zahlen
b-malige Wiederholung der Addition von a	
Multiplikation $c = a+a+a+\ldots+a$ $c = a \cdot b$	$s = c/b$ $b = c/a$ führt zu gebrochenen (rationalen) Zahlen
b-malige Wiederholung der Multiplikation mit a	
Potenzierung $c = a \cdot a \cdot a \cdot \ \ldots \ \cdot a$ $c = a^b$	$a = \sqrt[b]{c}$ $b = \dfrac{\log(c)}{\log(a)} = {}_a\log(c)$ führt zu irrationalen bis komplexen Zahlen

elememtarfunktion.cdr h. völz 21.8.16

Bedeutung von Messwerten

Mit der Technik wurde es notwendig genauere Werte zur Konstruktion zu besitzen.
Sie musste durch die Entwicklung der Messtechnik bereitgestellt werden. Dies betonte u. a. Omm zu Beginn seines Buches:

> *„Durch Messen erbaut man die Welt. Das sagte vor neunhundert Jahren ein weiser Araber. Ein Wort, das nach wenig klingt und das dennoch alles umfaßt. Beinahe nichts ist möglich ohne das Maß und ohne die Geräte des Messens. Ordnung, Sicherheit und Recht ... berechnen, erschließen und wirtschaftlich arbeiten ... mit dem Messen fängt alles an.“*



Außerdem entstanden Rechner und später **Computer** dazu.
Weitere Grundlagen führten zum **System International** (SI)

Insgesamt zeigte sich, dass Messwerte immer **Fehler** (Ungenauigkeiten, Toleranzen durch vielfältige Ursachen enthalten, u. a.:

- Typisch sind Mängel an Messgeräten
- Toleranzen der zu messenden Objekte (Streuungen)
- Externe Störungen, Erschütterungen usw.
- Das immer vorhanden e Wärmerauschen

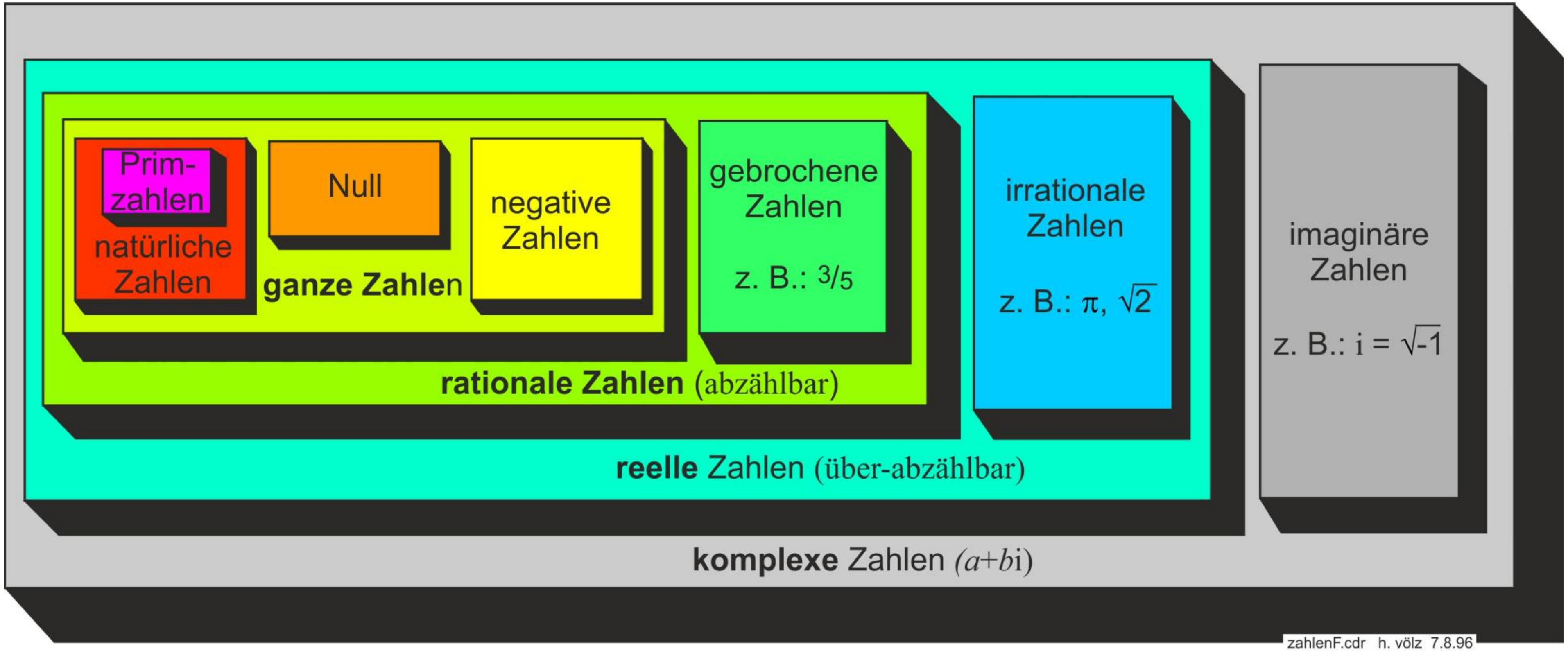
Zu ihrer Einengung entstand die Fehlerrechnung.
Sie führt überwiegend zu der Glockenkurve nach Gauß (Nebenbild)

Ein Messwert besteht dann aus zwei Teilen

$$X = X_0 \pm \sigma$$

Daher sind auch die Eigenschaftswerte der Realität nur näherungsweise mit Toleranz zu erfassen.

Deshalb kämpften schon Mach und noch intensiver Einstein gegen die übertriebene Verifikation kleiner Effekte. Sie hielten daher sogar einige Experimente für überflüssig.



Digitaltechnik wird extra behandelt

Mathematik und Gesetze

Aus mehreren Messwerten können Kurvenverläufe abgeleitet werden
U. a. mit Abhängigkeit von Zeit und/oder Raum usw. hergestellt werden.
Meist sollen sie der Realität exakt entsprechen. Mittelbar weist darauf Einstein hin:

> *„Die Mathematik genießt vor allen anderen Wissenschaften ein besonderes Ansehen, ihre Sätze sind absolut sicher und unbestreitbar, während die anderen Wissenschaften bis zu einem gewissen Grad umstritten und stets in Gefahr sind, durch neu entdeckte Tatsachen umgestoßen zu werden.“*

Da aber bereits die Messwerte Toleranzen besitzen, muss das noch mehr für die Gültigkeit der Kurvenverläufe (also Formeln) gelten
Auch hierauf geht teilweise Einstein ein:

Ihm war der innere Zusammenhang von Grundannahmen wichtiger. Er behauptete sogar, dass es immer Experimente geben wird, die auch Abweichendes von der Theorie aussagen und trotzdem ihr nicht zu widersprechen brauchen und daher weiter als gültig behandelt werden.

Hinzu kommt: Was funktioniert, kann legitim sein, muss aber nicht mit logischer Notwendigkeit wahr sein. Eine Hypothese kann nämlich auch dort erfolgreich sein, wo die Abweichung zur Wirklichkeit unwesentlich ist.

Eine Aussage von Tobias Danzig kann dazu ergänzt werden:

> *„Man könnte den Mathematiker mit einem Modeschöpfer vergleichen, der überhaupt nicht an Geschöpfe denkt, dem seine Kleider passen sollen. Sicher, seine Kunst begann mit der Notwendigkeit, solche Geschöpfe zu bekleiden, aber das ist lange her; bis heute kommt gelegentlich eine Figur vor, die zum Kleidungsstück passt, als ob es für sie gemacht sei. Dann sind Überraschung und Freude endlos!“*

Ein Beweis dafür ist die *Matrizenrechnung*, die 1850 von Sylvester rein theoretisch, also völlig unabhängig von irgendeiner Anwendung eingeführt wurde und daher längere Zeit unbeachtet blieb. Ohne von ihr zu wissen, benutzte solche Regeln dann 1925 Werner Karl Heisenberg für seine *Quantenmechanik*. Erst sein Lehrer Max Born wies ihn im Nachhinein darauf hin.

Kontinuierlich (analog) >-< diskret

Kontinuierlich *Lat. continens, continuus: zusammenhängend, angrenzend an, unmittelbar folgend, ununterbrochen, jemand zunächst stehend. continuare aneinanderfügen, verbinden, fortsetzen verlängern, gleich darauf, ohne weiteres. contingere ≈ berühren, kosten, streuen, jemandem nahe sein, beeinflussen.*

Mathemati*k zwischen zwei Zahlen (Messwerte, Signale) gibt es immer einen Zwischenwert mit (unendlich vielen Ziffern).*
Technik*: Signale: continierlich, ermöglicht beliebige Werte bei Zeit und Amplitude (Energie).* ähnlich *stetig*

Analog Grie. *logos* Vernunft, Latein. *ana* auf, wieder, aufwärts, nach oben. *analogia* mit der Vernunft übereinstimmend, Gleichmäßigkeit auch Entsprechung, Ähnlichkeit, Gleichwertigkeit, Übereinstimmung. Z. B.: Uhrzeiger - Erdrotation

Analogie: Dreiständeaufbau des Staates: ***Biologie/Medizin***: Analoge Organe (Augen: Wirbeltier, Tintenfisch und Insekt).
Psychologie: Analogien grundlegend für Denken, Literatur: Nutzung für Fabeln, Parabeln, Märchen, Gleichnisse usw.
Kybernetik: Technisch Systeme analog lebenden Organismen, wird konsequente angenommen
Bei Signalen leider oft falsch statt kontinuierlich benutzt

Diskret: Lat. *discretion* Unterscheidungsvermögen, Urteil und Entscheid. *Discretu*s abgesondert, getrennt; *discernere:* scheiden, trennen, unterscheiden, beurteilen, entscheiden:

Umgangssprachlich: taktvoll, rücksichtsvoll, zurückhaltend, unauffällig, unaufdringlich, vertrauensvoll, geheim, verschwiegen.
Mathematisch: etwas zerfällt oder gliedert sich in einzelne (abzählbare viele) Punkte oder Elemente.
Physikalisch Größen, die sich nur in endlichen Schrittweiten ändern (vgl. spezieller Quant).
Signal: besitzt nur endlich viele Werte (mit Toleranzbereichen, die eigentlich streng gegeneinander abgegrenzt sein sollten.

digital, Quantum

D***igital***: lat. *digitus* Finger; zählen, ziffernmäßig, in Zahlen angeben. Es betrifft: z. T. unterschiedliche Zahlenbasen:
binär = 2, oktal = 8, dezimal = 10, hexadezimal = 16.

Quantisiert: Lat. *quantitas* Größe, Anzahl; *quantum* wie viel, so viel wie, inwieweit, irgendwie. usw.:
Philosophie: Quantität (≈ Menge, Maßeinheit) ↔ Qualität (≈ Güte, Messwert).
Physik: Das Quant wurde 1900 durch Planck eingeführt; Beginn der Quantentheorie.
Technik . Quantisierte Signale. diskrete Amplituden (-stufen), und oder Zeitpunkte ***(Takte).***

Zahlenbasis b gilt für *Stellenwertsysteme*

$$\text{Zahl } y = x_1 \cdot b + x_2 \cdot b^4 + x_3 \cdot \mathrm{b}^3 + x_4 \cdot b^2 \; x_5 \cdot b + x_6, + x_7 b^{-1} + x_8 b^{-2} \; usw.$$

Komma ↑

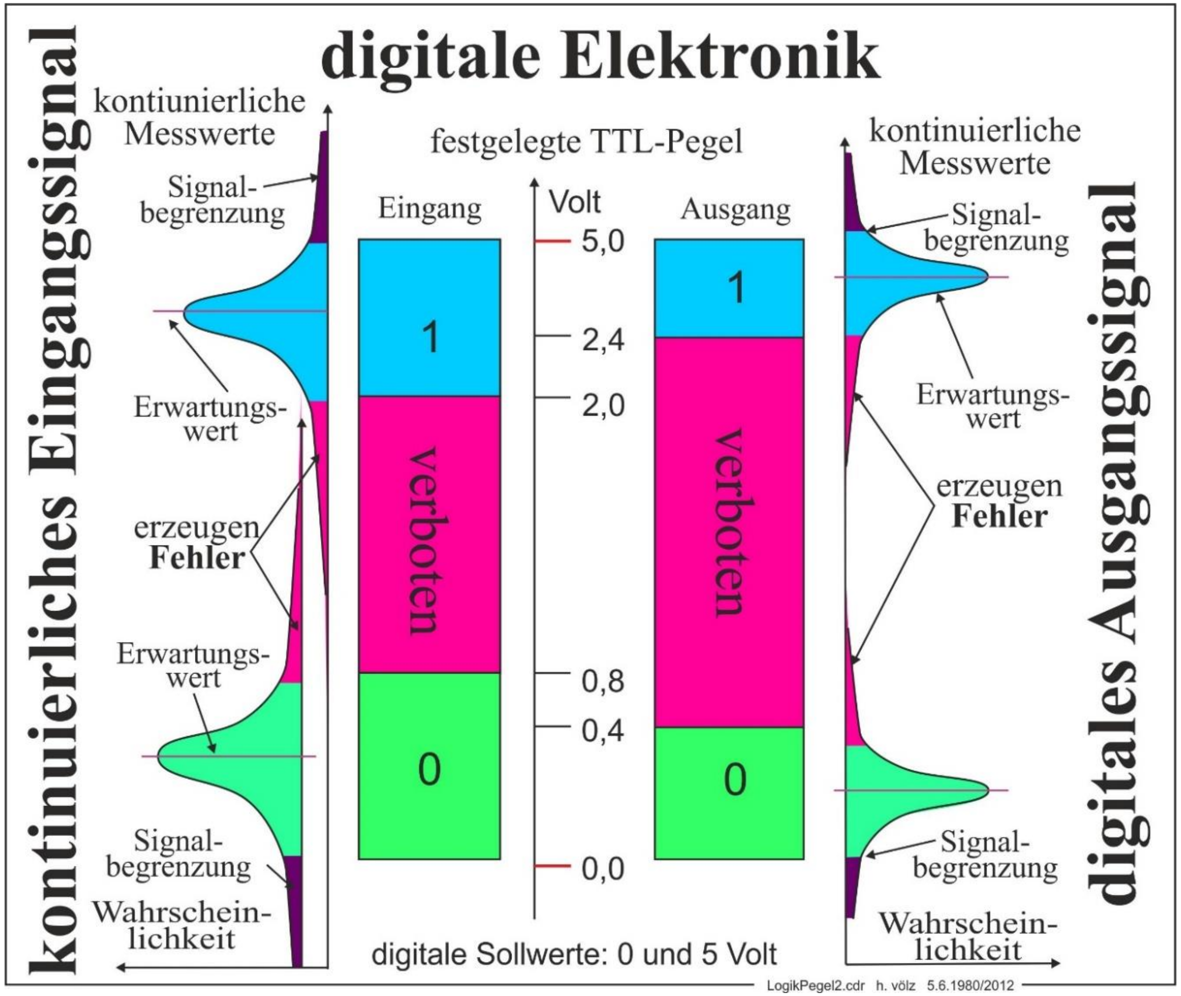
Die b^x-Werte bestimmen nur die Position vor bzw. nach dem Komma.
Die xi sind ganze von 0 bis b-1, die „+" entfallen in der richtigen Schreibweise

$$y = x_1 \, x_2 \, x_3 \, x_4 \, x_5 \, x_6, x_7 \, x_8 \; usw.$$

Bit (binäry digit) ist die Einheit für die Basis 2 und führt zur Digitaltechnik (-Elektronik)
Es wurde 1948 von Tukey eingeführt, besitzt nur einen der beiden Werte 0 oder 1

Wird leider oft falsch statt Ja/Nein (wahr/falsch) verwendet

Digitalisierung und Fehlerrate



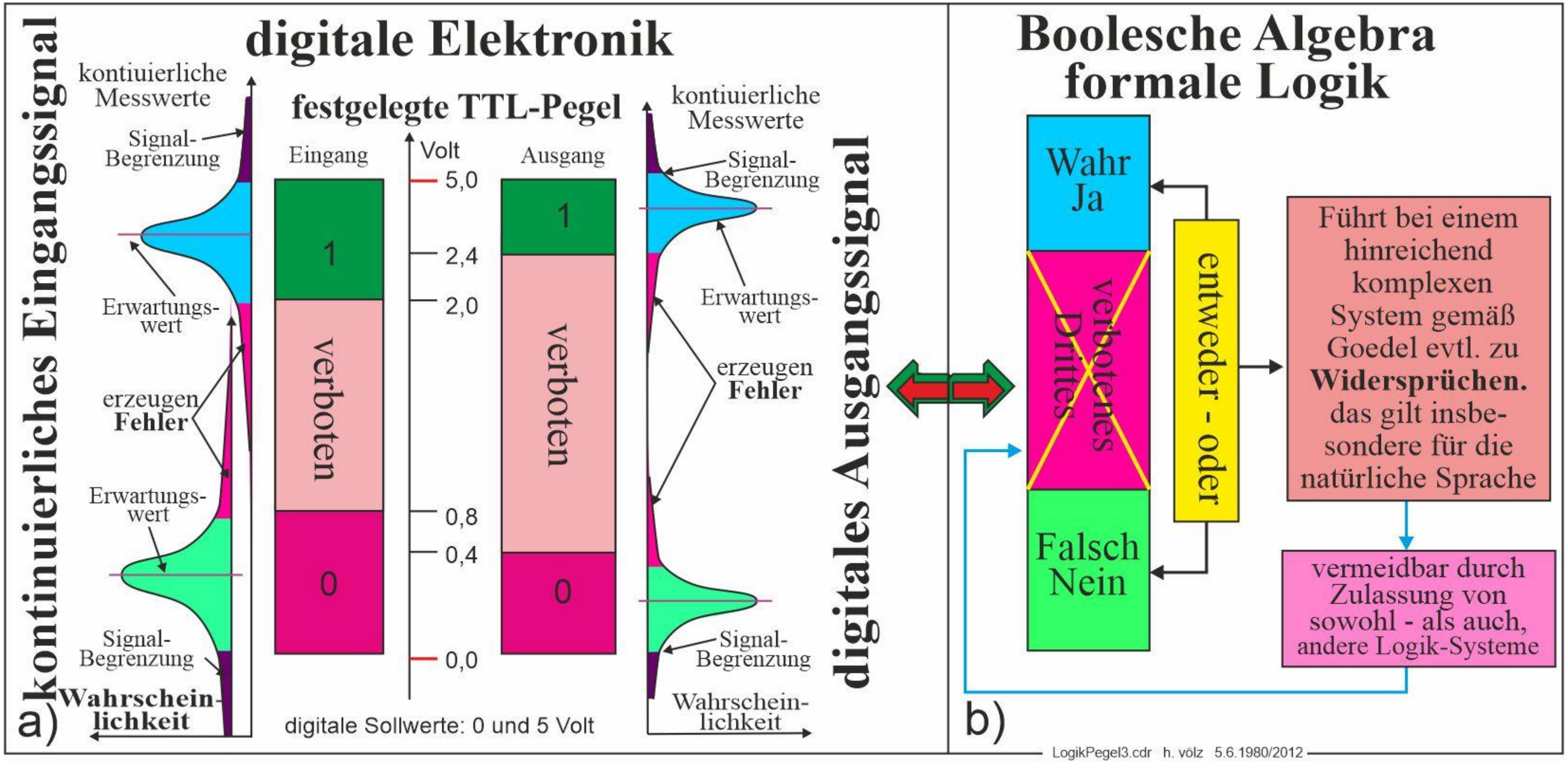
Infolge der immer vorhandenen thermodynamischen Energie entsteht das unvermeidliche thermische (Widerstands-) Rauschen.
Bandbreite *B in Hz,* Boltzmann-Konstante k= 1,38…·10^{-23} Ws/grd und der absoluten Temperatur T in K ergibt sich die Rauschleistung $P_r = \cdot T\cdot B$, *die an* einem Arbeitswiderstand R die gemittelte Rausch-Spannung erzeugt

$$\overline{U}_r = \sqrt{P_r \cdot R} = \sqrt{k \cdot T \cdot B \cdot R}\ .$$

Sie ist jeder, auch der digitalen Schaltung am Ein- und Ausgang überlagert.
Durch kosmisches Rauschen, die heute vielen Rundfunk-/Fernsehsender, Mobiltelefone, elektrischen Geräte usw. noch größer
Deshalb können nicht die exakten 0,000… bzw. 1,000…-Signale benutzt werden. Es müssen Toleranzbereiche eingeführt werden
Im Bild für TTL-Schaltungen
Dennoch können im beachtlichen Umfang Fehler gegenüber den genau festgelegte **0**- und **1**-Bereiche auftreten
Die betreffen die rot gezeichnete Restschwänze von der Glockenkurve

Sie unterlaufen die eindeutige Zuordnung und bewirken so digitale Fehler.
Lediglich die Werte unter 0 und über 5Volt (schwarz) können durch Begrenzung eindeutig 0 bzw. 1 zugewiesen werden.

Insgesamt ist nie eine absolut fehlerfreie digitale Übertragung und/oder Speicherung möglich.
Folglich entstehen immer digitale Fehler. Natürlich lassen sich die ***Fehlerraten*** sehr klein halten, aber null werden sie nie.
Selbst eine zusätzliche Fehlerkorrektur (sie später) mittels zusätzlicher Redundanz kann sie nie zu Null machen.
Folglich sind alle Anwendungen der digitalen Rechentechnik mit einer gewissen Fehlerrate unsicher!
Daher entspricht die Digitaltechnik nie exakt einer logischen Entscheidung.
Genau hier besteht also die Gefahr, dass mit ihr ***Fehlentscheidungen*** berechnet werden.



Doch dieser teilweise sehr beachtliche Fehler findet leider so gut wie keine Beachtung.

Grundsätzlich sind daher bei der digitalen Rechentechnik immer ***zwei Inhalte*** deutlich zu unterscheiden:

1. Eigentlich dürfte bei der **Logik** nur ***Ja*** oder ***Nein*** bzw. ***Wahr*** oder ***Falsch*** ohne ein zulässiges Drittes verwendet werden selbst **0/1** selbst in spezieller Schreibweise ist zumindest unglücklich, gefährlich.
2. Bei ***elektrische Signalen, Messwerten usw.*** treten immer Abweichungen (Toleranzen) durch Störungen auf, welche die Zahlenwerte entsprechend Glockenkurve zumindest etwas verändern. Es entsteht eine **Fehlerrat**e bzw. *Streuung* .